ნანა ჯაფარიძე
მაია წილოსანი
ნანი წულაია

მათემატიკა 10

მასწავლებლის წიგნი

ბაკურ სულაკაურის
გამომცემლობა

ნანა ჯაფარიძე
მაია წილოსანი
ნანი წულაია

მათემატიკა 10
მასწავლებლის წიგნი

ყდის დიზაინი: **მართა თაბუკაშვილი, ნათია კვარაცხელია**
დაკაბადონება: **მაია ფეიქრიშვილი**

პირველი გამოცემა, 2012

ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა
მისამართი: დავით აღმაშენებლის 150, თბილისი 0112
ტელ.: 291 09 54, 291 11 65
ელფოსტა: info@sulakauri.ge

www.sulakauri.ge

ISBN 978-9941-15-636-6

N. Jafaridze
M. Tsilosani
N. Tsulaia

MATH 10
Teacher's Book

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი 5
ეროვნული სასწავლო გეგმა 6
წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები 7
შინაარსისა და მიზნების რუკა 12
მოსწავლის შეფასების სისტემა 16
გთავაზობთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს 19

I თავი 23
1. ფუნქცია. ფუნქციის თვისებები 23
2. წრფივი ფუნქცია 26
3. კვადრატული ფუნქცია 26
4. კვადრატული ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა 27
5. უბან-უბან წრფივი ფუნქცია 29
6. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია 30
7. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა 31
8. უკეთესი ვარიანტის არჩევა 32

II თავი 35
1. გეომეტრიული გარდაქმნები 35
2. პარალელური გადატანა 37
3. ცენტრული სიმეტრია 38
4. მობრუნება 40
5. მსგავსების გარდაქმნა. ჰომოთეტია 42
6. სტერეომეტრიის აქსიომები 43
7. აქსიომების შედეგები 44
8. წრფეთა პარალელურობა 45
9. წერტილის კოორდინატები სივრცეში 45
II თავის დამატებითი სავარჯიშოები 46

III თავი 47
1. პარამეტრების შემცველი განტოლება 47
2. მოდულის შემცველი განტოლებისა და უტოლობის ამოხსნა 48
3. მაღალი ხარისხის განტოლების ამოხსნა 49
4. ირაციონალური განტოლება 51
5. უტოლობა 52
6. პარამეტრის შემცველი უტოლობები 52
7. უტოლობის ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით 53
III თავის დამატებითი სავარჯიშოები 54

IV თავი 57
1. კოსინუსების თეორემა 57
2. კოსინუსების თეორემის შედეგები 58
3. სინუსების თეორემა 58
4. სამკუთხედის ბისექტრისის სიგრძისა და ფართობის 59

გამოსათვლელი ფორმულები 59
5. სამკუთხედების ამოხსნა 60
IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები 61

V თავი 64
2. ირაციონალური გამოსახულების გამარტივება 64
3. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი 65
4. გამოსახულების გამარტივება 66
5. თვლის სისტემები 66
V თავის დამატებითი სავარჯიშოები 67

VI თავი 69
1. წესიერი მრავალკუთხედები 69
2. კუთხის რადიანული ზომა 70
3. სეგმენტის ფართობი 70
VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები 71

VII თავი 77
1. ლოგიკური მსჯელობა 77
2. ოპერაციები გამონათქვამებზე 79
3. იმპლიკაცია. ეკვივალენცია 80
4. ლოგიკური გამომდინარეობა 81
5. ამოცანები ალბათობის თეორიიდან 82
6. სტატისტიკის ელემენტები 84
VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები 85

VIII თავი 88
1. პერიოდული ფუნქცია 88
2. სინუსის და კოსინუსის განმარტება 88
3. sin და cos ფუნქციების ზოგიერთი თვისება 89
4. tg და ctg ფუნქციების ზოგიერთი თვისება 89
5. რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები 90
6. ტრიგონომეტრიული განტოლება 91
VIII თავის დამატებითი სავარჯიშოები 93

საკონტროლო წერის ნიმუშები 96

შესავალი

X კლასში მათემატიკის საგნის სწავლების ძირითადი მიზანია მოზარდში კვლევის ჩვევის, აგრეთვე ანალიტიკური, ლოგიკური, სისტემური და სიმბოლური აზროვნების გამომუშავება. მათემატიკის სწავლამ მოსწავლეს უნდა შესძინოს ის უნარ-ჩვევები, რომელიც მას დაეხმარება ცხოვრებისეული, პრაქტიკული პრობლემების გადაჭრაში.

ეროვნული სასწავლო გეგმის დანიშნულებაა დაეხმაროს სასკოლო განათლების პროცესის მონაწილეებს ამ პროცესის დაგეგმვასა და წარმართვაში.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში აღწერილია ის სავალდებულო მოთხოვნები, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ყველა მოსწავლე სასწავლო წლის დასრულების მერე. ეს მოთხოვნები თითოეული მიმართულებისათვის შედეგებისა და მათი ინდიკატორების ენაზეა ჩამოყალიბებული.

შედეგი არის დებულება იმის შესახებ, თუ რა უნდა შესძლოს მოსწავლემ სწავლის მოცემული საფეხურის დასრულების შემდეგ.

ინდიკატორი არის დებულება იმ ცოდნისა და უნარ-ჩვევების დემონსტრირების შესახებ, რომელიც ჩამოყალიბებულია შესაბამის შედეგში. ინდიკატორის ძირითადი დანიშნულებაა იმის წარმოჩენა, მიღწეულია თუ არა შედეგი. ინდიკატორი ორიენტირებულია უნარ-ჩვევებზე და ჩამოყალიბებულია აქტივობის ენაზე.

X კლასის წარმოდგენილი სახელმძღვანელოს დანიშნულებაა ხელი შეუწყოს ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებული უნარ-ჩვევების გამომუშავებას.

სახელმძღვანელო ფარავს სტანდარტის ყველა შედეგს.

მასალის მიწოდების ძირითადი მეთოდური ორიენტირია პრობლემური თხრობა. მოსწავლე არის გაკვეთილის ახსნის აქტიური მონაწილე.

გაგაცნობთ წიგნის სტრუქტურას.

თითქმის ყველა პარაგრაფი იწყება სიტუაციური ამოცანით, მაპროვოცირებელი შეკითხვით ან ისეთი ამოცანით, რომელიც მოსწავლისაგან კვლევას მოითხოვს და რომელიც იძლევა ვარაუდის გამოთქმის საშუალებას. გაკვეთილის ეტაპები გამოყოფილია აქტივობებით, რითაც ხდება ახალი მასალის ათვისების შემოწმება და გაღრმავება. ვარსკვლავით მონიშნულია ამოცანები მაღალი შეფასებისათვის.

მასწავლებლის სარეკომენდაციო წიგნში მოცემულია რამოდენიმე გაკვეთილის სცენარი, აქტივობების მიზანი, დანიშნულება, სავარაუდო და სწორი პასუხები, საკონტროლოს ნიმუშები. მოცემულია შეფასების ძირითადი მდგენელები, დამხმარე ლიტერატურა მასწავლებლისათვის.

აგრეთვე გთავაზობთ სავარაუდო საათობრივ განაწილებას. სარეზერვო საათები გვაძლევს საშუალებას, რომ ზოგიერთ გაკვეთილს მასწავლებელმა მეტი დრო დაუთმოს, გამოიყენოს თავის შეხედულებისამებრ.

ეროვნული სასწავლო გეგმა

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები მიმართულებების მიხედვით:

რიცხვები და მოქმედებები	კანონზომიერებები და ალგებრა	გეომეტრია და სივრცის აღქმა	მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა
X1. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესისტემების ერთმანეთისაგან განსხვავება. **X2.** მოსწავლეს შეუძლია სხვადასხვა პოზიციური სისტემების/ ნამდვილ რიცხვთა ქვესისტემების ერთმანეთთან დაკავშირება. **X3.** მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მოქმედებების შედეგის შეფასება. **X4.** მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება. **X5.** მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნა.	**X6.** მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის თვისებების კვლევა და მათი თვისებების გამოყენება სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების შესასწავლად. **X7.** მოსწავლეს შეუძლია განტოლებათა და უტოლობათა სისტემების გამოყენება პრობლემების გადაჭრისას. **X8.** მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ელემენტების გამოყენება პრობლემის გადაჭრისას.	**X9.** მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიულ ფიგურათა წარმოდგენისა და დებულებათა ფორმულირების ხერხების გამოყენება. **X10.** მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება. **X11.** მოსწავლეს შეუძლია ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების მოძებნა. **X12.** მოსწავლეს შეუძლია სიბრტყეზე გეომეტრიული გარდაქმნების კვლევა და მათი გამოყენება გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას.	**X13.** მოსწავლეს შეუძლია ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო თვისობრივი და რაოდენობრივი მონაცემების მოპოვება. **X14.** მოსწავლეს შეუძლია თვისობრივ და რაოდენობრივ მონაცემთა მოწესრიგება და წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით. **X15.** მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა. **X16.** მოსწავლეს შეუძლია სტატისტიკური და ალბათური ცნებებისა და პროცედურების გამოყენება ყოველდღიურ ვითარებაში.

წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები

მიმართულება: რიცხვები და მოქმედებები

X.1. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესისტემების ერთმანეთისაგან განსხვავება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- განასხვავებს რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს (მათ შორის, როგორც პერიოდულ და არაპერიოდულ ათწილადებს); ასაბუთებს რიცხვის ირაციონალურობას / რაციონალურობას და ახდენს ირაციონალურობის / რაციონალურობის დემონსტრირებას მოდელის გამოყენებით; ახდენს ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვების მიმდევრობით მიახლოების დემონსტრირებას მოდელის გამოყენებით;
- მოცემული სიზუსტით ამრგვალებს ნამდვილ რიცხვებს; განასხვავებს უსასრულო პერიოდული ათწილადის შემოკლებით ჩაწერას დამრგვალებისაგან;
- ორი მოცემული ნამდვილი რიცხვისათვის ასახელებს მათ შორის მოთავსებულ რაციონალურ რიცხვს;
- ახდენს ნამდვილი რიცხვის ათობითი პოზიციური სისტემით ჩაწერის ინტერპრეტაციას და/ან მის დემონსტრირებას მოდელის გამოყენებით (მაგალითად, *ახდენს 1-ზე ნაკლები დადებითი ნამდვილი რიცხვის მიახლოებას [0, 1] მონაკვეთის თანმიმდევრული დანაწილებით*).

X.2. მოსწავლეს შეუძლია სხვადასხვა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა ქვესისტემების ერთმანეთთან დაკავშირება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ადარებს სხვადასხვა პოზიციურ სისტემებს ერთმანეთს; მსჯელობს თითოეულის უპირატესობაზე სხვადასხვა შემთხვევებში;
- აკავშირებს ნამდვილ რიცხვთა ქვესიმრავლეებს ერთმანეთთან სიმრავლეთა თეორიის ენის გამოყენებით (ქვესიმრავლე, სიმრავლეთა თანაკვეთა, გაერთიანება, სხვაობა, დამატება; ამ მიმართებების გამოსახვა სხვადასხვა ხერხით);
- სხვადასხვა ფორმით გამოსახავს ნამდვილ რიცხვებს (მაგალითად, პერიოდულ ათწილადს ჩაწერს წილადის სახით); ადარებს და ალაგებს სხვადასხვა ფორმით ჩაწერილ ნამდვილ რიცხვებს (ათწილადი, წილადი; ერთი და იგივე მთელის ნაწილი და პროცენტი; რიცხვის სტანდარტული ფორმა, ათობითი და ორობითი პოზიციური სისტემა; რიცხვის ხარისხი და ირაციონალური გამოსახულება).

X.3. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მოქმედებების შედეგის შეფასება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ამარტივებს ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების (აგრეთვე მოდულის) შემცველ გამოსახულებას მოქმედებათა თვისებების, მოქმედებების შესრულების თანმიმდევრობისა და მათ შორის კავშირის გამოყენებით;
- ახდენს წილადი მაჩვენებლის მქონე ხარისხის ინტერპრეტაციას და მისი თვისებების დემონსტრირებას; ადარებს და ალაგებს ერთი და იგივე ფუძის მქონე ხარისხებს;
- ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით ირჩევს რა უფრო მიზანშეწონილია – მოქმედებათა შედეგის შეფასება, თუ მისი ზუსტი მნიშვნელობის პოვნა; იყენებს შეფასებას ნამდვილ რიცხვებზე შესრულებული გამოთვლების შედეგის შესამოწმებლად;
- ერთი არითმეტიკული მოქმედების შემცველ გამოსახულებაში ამრგვალებს წევრებს (ნამდვილი რიცხვებს) და პოულობს მოქმედებებათა შედეგის მიახლოებით

მნიშვნელობას; მსჯელობს დამრგვალებით გამოწვეულ განსხვავებაზე;
- მოყავს ფარდობითი აზრით "ძალიან დიდი" და "ძალიან მცირე" სიდიდეთა მაგალითები (მაგალითად, *სინათლის წელი, ელექტრონის მასა).*

X.4. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:
- ასაბუთებს დებულებას რიცხვების თვისებების ან რიცხვითი კანონზომიერებების შესახებ; შესაბამის შემთხვევაში ახდენს ჰიპოთეზის უარყოფას კონტრმაგალითით;
- მსჯელობის ნიმუშებში ამოიცნობს დედუქციას, განზოგადებას და ანალოგიას; იყენებს მათ მთელ რიცხვებს შორის დამოკიდებულებების დასადგენად (მაგალითად, *რომელი ციფრი დგას რიცხვის 2^{3455} ერთეულების თანრიგში?*);
- ამოცანების ამოხსნისას იყენებს რიცხვით სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების გამოსახვის ზოგიერთ ხერხს (მაგალითად, ვენის დიაგრამებს);
- იყენებს "საწინააღმდეგოს დაშვების" მეთოდს რიცხვების შესახებ მარტივი დებულებების დამტკიცებისას.

X.5. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნა.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:
- ასრულებს გამოთვლებს და ადარებს ორ მარტივად/რთულად დარიცხულ საპროცენტო განაკვეთს, სხვადასხვაგვარ ფასდაკლებას, დაზეგვრას; მსჯელობს მათ შორის შორის განსხვავებაზე;
- მსჯელობს ინფორმაციული და საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების გამოყენებასთან დაკავშირებული რაოდენობრივი ხასიათის საკითხების შესახებ;
- იყენებს კუთხის ზომის ერთეულებს შორის კავშირებს წრეწირზე მობრუნებასთან და/ან ბრუნვის შედეგად გადაადგილებასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას (მაგალითად, *ლილვთან დაკავშირებული ამოცანები*).

მიმართულება: კანონზომიერებები და ალგებრა

X.6. მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის თვისებების კვლევა და მათი თვისებების გამოყენება სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების შესასწავლად.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების აღმწერი ფუნქციისათვის (მათ შორის რეალურ ვითარებაში) ასახელებს ფუნქციის ტიპს (წრფივი, მოდულის შემცველი, კვადრატული, უკუპროპორციული დამოკიდებულების $f(x)=\frac{k}{x}$) ამ ფუნქციის გამოსახვის ხერხისაგან დამოუკიდებლად;

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების აღმწერი ფუნქციისათვის, მათ შორის რეალურ ვითარებაში, პოულობს ფუნქციის ნულებს, ფუნქციის მაქსიმუმს/მინიმუმს, ზრდადობა/კლებადობისა და ნიშანმუდმივობის შუალედებს; ახდენს ამ მონაცემების ინტერპრეტაციას რეალური ვითარების კონტექსტში;

ცვლის ფუნქციის პარამეტრებს და ახდენს ამ ცვლილების შედეგის ინტერპრეტირებას იმ პროცესის კონტექსტში, რომელიც ამ ფუნქციით აღიწერება (მაგალითად, *გავლილი მანძილის დროზე დამოკიდებულების აღმწერ ფუნქციაში -* $S(t)=v\cdot t+S_0$*, რა გავლენას ახდენს სიჩქარის ცვლილება განვლილ მანძილზე?*);

ადარებს ორ ფუნქციას, რომლებიც რეალურ პროცესს გამოსახავს (პოულობს იმ სიმრავლეს სადაც ერთი ფუნქცია მეტია/ნაკლებია მეორე ფუნქციაზე, ტოლია მეორე ფუნქციის) და ახდენს შედარების შედეგის ინტერპრეტაციას კონტექსტთან მიმართებაში.

X.7. მოსწავლეს შეუძლია განტოლებათა და უტოლობათა სისტემების გამოყენება პრობლემების გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ტექსტური ამოცანის ამოსახსნელად ადგენს და ხსნის ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას; ახდენს ამონახსნის ინტერპრეტაციას ამოცანის კონტექსტის გათვალისწინებით;
- ირჩევს და იყენებს განტოლებათა/უტოლობათა სისტემის ამოხსნის ხერხს (მაგალითად, *ჩასმის, შეკრების*); გრაფიკულად გამოსახავს ამონახსნს და ახდენს ამონახსნის სიმრავლურ ინტერპრეტაციას;
- წრფივი უტოლობის ან ორი წრფივი უტოლობის შემცველი სისტემის საშუალებით გამოსახავს ამოცანის პირობაში მოცემულ შეზღუდვებს (მაგალითად, *ფირმამ სარეკლამო კომპანიაზე უნდა დახარჯოს არაუმეტეს 2000 ლარისა. მათ დაგეგმილი აქვთ გამოაქვეყნონ არანაკლებ 10 სარეკლამო განცხადებისა. დასვენების დღეებში სარეკლამო განცხადების ღირებულებაა 20 ლარი, ხოლო კვირის დანარჩენ დღეებში 10 ლარი.*).

X.8. მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ელემენტების გამოყენება პრობლემის გადაჭრისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს ხისებრ დიაგრამებს და გრაფებს, ვარიანტების დასათვლელად, გეგმის/განრიგის შესადგენად, ოპტიმიზაციის დისკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად (ალგორითმების გარეშე) (მაგალითად, *ორ ობიექტს შორის ოპტიმალური მარშრუტის მოძებნა*);
- მიმდევრობის გამოსახვისას იყენებს რეკურენტულ წესს *(მათ შორის რეალური პროცესების დისკრეტული მოდელებით აღწერისას. მაგალითად, მოსახლეობის რაოდენობის ყოველწლიური მუდმივი პროცენტული ზრდა)*; განავრცობს რეკურენტული წესით მოცემულ მიმდევრობას;
- ადეკვატურად იყენებს სიმრავლურ ტერმინებს და ცნებებს (მაგალითად, *ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე*) და მოქმედებებს სიმრავლეებზე (თანაკვეთა, გაერთიანება, სხვაობა, დამატება), მათ შორის რეალური ვითარების მოდელირებისას ან აღწერისას.

მიმართულება: გეომეტრია და სივრცის აღქმა

X.9. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიულ ფიგურათა წარმოდგენისა და დებულებათა ფორმულირების ხერხების გამოყენება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- აღწერს გეომეტრიულ ობიექტებს და მათ გრაფიკულ გამოსახულებებს შესაბამისი ტერმინოლოგიის გამოყენებით;
- იყენებს მათემატიკურ სიმბოლოებს გეომეტრიული დებულებებისა და ფაქტების გადმოცემისას; სწორად იყენებს ტერმინებს: “ყველა”, “არცერთი”, “ზოგიერთი”, “ყოველი”, “ნებისმიერი”, “არსებობს” და “თითოეული”;
- მსჯელობა-დასაბუთებისას იყენებს მოცემული პირობითი წინადადების/დებულების შებრუნებულ, მოპირდაპირე და შებრუნებულის მოპირდაპირე წინადადებას/დებულებებს.

X.10. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- დედუქციური და ინდუქციური მსჯელობის ნიმუშში აღადგენს გამოტოვებულ საფეხურს/საფეხურებს;
- იყენებს ალგებრულ გარდაქმნებს, ტოლობისა და უტოლობების თვისებებს გეომეტრიულ დებულებათა დასაბუთებისას;

- იყენებს კოორდინატებს გეომეტრიული ობიექტის თვისებების დასადგენად და დასაბუთებისთვის;
- იყენებს ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომებს გეომეტრიული დებულებების დასაბუთებისას.

X.11. მოსწავლეს შეუძლია ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების მოძებნა.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების დასადგენად (მათ შორის რეალურ ვითარებაში) იყენებს ფიგურათა (მრავალკუთხედების, წრეების/წრეწირების) მსგავსებას და დამოკიდებულებებს ფიგურის ელემენტების ზომებს შორის (მაგალითად, *იმ საგნის სიმაღლის გაზომვა, რომლის ფუძე მიუდგომელია, მიუდგომელ წერტილამდე მანძილის გამოთვლა*);
- პოულობს ბრტყელი ფიგურის ფართობს და იყენებს მას ოპტიმიზაციის ზოგიერთი პრობლემის გადასაჭრელად (მათ შორის რეალურ ვითარებაში);
- იყენებს კოორდინატებს სიბრტყეზე გეომეტრიული ფიგურის ზომების დასადგენად.

X.12. მოსწავლეს შეუძლია სიბრტყეზე გეომეტრიული გარდაქმნების კვლევა და მათი გამოყენება გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ახდენს გეომეტრიულ გარდაქმნებს სიბრტყეზე და მარტივ შემთხვევებში იყენებს მათ ფიგურათა ტოლობის დასადგენად;
- იყენებს კოორდინატებს გეომეტრიული გარდაქმნების (პარალელური გადატანა, ღერძული/ცენტრული სიმეტრია) შესრულებისა და გამოსახვისათვის;
- მსჯელობს და აკეთებს დასკვნას ერთი და იგივე ტიპის გეომეტრიული გარდაქმნების (პარალელური გადატანა, მობრუნებები ერთი და იგივე ცენტრის გარშემო, ღერძული სიმეტრიები პარალელური ღერძების მიმართ, საერთო ცენტრის მქონე ჰომოთეტიები) კომპოზიციების შესახებ;
- ფიგურის და/ან გეომეტრიული გარდაქმნების თვისებების მიხედვით მსჯელობს მოცემული ფიგურებით სიბრტყის დაფარვის შესაძლებლობის შესახებ; შესაბამის შემთხვევაში ახდენს სიბრტყის (ლოკალურად) დაფარვის დემონსტრირებას.

მიმართულება: მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა

X.13. მოსწავლეს შეუძლია ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო თვისობრივი და რაოდენობრივი მონაცემების მოპოვება.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- იყენებს მონაცემთა შეგროვების ხერხებს (დაკვირვება, გაზომვა, მითითებულ რესპონდენტთა ჯგუფის გამოკითხვა მზა ანკეტით/კითხვარით);
- ატარებს სტატისტიკურ (მათ შორის, შემთხვევით) ექსპერიმენტს და აგროვებს მონაცემებს;
- იკვლევს და იყენებს მონაცემთა სხვადასხვა ისტორიულ და თანამედროვე წყაროებს (მაგალითად, *საინფორმაციო ცნობარი, ინტერნეტი, კატალოგი და სხვა*).

X.14. მოსწავლეს შეუძლია თვისობრივ და რაოდენობრივ მონაცემთა მოწესრიგება და წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:

- ირჩევს თვისობრივ და რაოდენობრივ (დაუჯგუფებელ) მონაცემთა წარმოდგენის შესაფერის გრაფიკულ ფორმას, ასაბუთებს თავის არჩევანს და ქმნის ცხრილს/დიაგრამას;
- აგებს სხვადასხვა დიაგრამებს ერთი და იგივე თვისობრივი ან რაოდენობრივი

მონაცემებისთვის და მსჯელობს, თუ მონაცემთა რამდენად მნიშვნელოვან ასპექტებს წარმოაჩენს თითოეული და რა უპირატესობა გააჩნია თითოეულს;
- ახდენს მონაცემთა დაჯგუფებას/დალაგებას, მსჯელობს დაჯგუფების/დალაგების პრინციპზე.

X.15. მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:
- აღწერს შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, ითვლის ხდომილობათა ალბათობებს ვარიანტების დათვლის ხერხების გამოყენებით (მაგალითად, *ხისებრი დიაგრამის საშუალებით*);
- ატარებს ექსპერიმენტს შემთხვევითობის წარმომქმნელი რომელიმე მოწყობილობით და აფასებს ხდომილობის ალბათობას ექსპერიმენტული მონაცემების საფუძველზე (ფარდობითი სიხშირის საშუალებით), მსჯელობს განსხვავებაზე თეორიულ (მოსალოდნელ) შედეგსა და ემპირიულ (ექსპერიმენტულ) შედეგს შორის;
- მოცემული სასრული ალბათური სივრცისათვის აღწერს შემთხვევითობის წარმომქმნელ მოწყობილობას, რომლის ალბათურ მოდელსაც წარმოადგენს ეს სივრცე, ასაბუთებს მოწყობილობის დიზაინს.

X.16. მოსწავლეს შეუძლია სტატისტიკური და ალბათური ცნებებისა და პროცედურების გამოყენება ყოველდღიურ ვითარებაში.

შედეგი თვალსაჩინოა, თუ მოსწავლე:
- განიხილავს იმ სტატისტიკურ ვითარებებს, რომელთა გამოცდილებაც გააჩნია (მაგალითად *მოსახლეობის აღწერა, არჩევნები, საზოგადოებრივი აზრის გამოკითხვა*), იყენებს გამოქვეყნებულ ფაქტებს/მონაცემებს და მსჯელობს მოცემული პრობლემის შესახებ (მაგალითად *ეკოლოგიური საკითხების შესახებ*);
- მსჯელობს ალბათური მოდელების გამოყენების შესახებ დაზღვევაში, სოციოლოგიურ კვლევებში, დემოგრაფიაში;

მოჰყავს ალბათურ-სტატისტიკური მოდელების გამოყენების მაგალითები ბუნებისმეტყველებაში და მედიცინაში, ხსნის მოვლენებს შემთხვევითობის მექანიზმის მოქმედების საშუალებით.

შინაარსისა და მიზნების რუკა

შინაარსი	თემის კავშირი მიზნებთან და შედეგებთან	საავარაუდო ხანგრძლივობა
1	2	3
I თავი ფუნქცია. ფუნქციის თვისებები. წრფივი ფუნქცია. გავიხსენოთ კვადრატული ფუნქცია. კვადრატული ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა. უბან-უბან წრფივი ფუნქცია. $f\colon x \to \frac{k}{x}$ ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა. უკეთესი ვარიანტის არჩევა.	მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის თვისებების კვლევა და მათი თვისებების გამოყენება სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების შესასწავლად. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნა. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესისტემების ერთმანეთისაგან განსხვავება.	29 სთ
საკონტროლო წერა №1		1 სთ
II თავი გეომეტრიული გარდაქმნები. ღერძული სიმეტრია. პარალელური გადატანა. ცენტრული სიმეტრია. მობრუნება. მსგავსების გარდაქმნა. ჰომოთეტია. სტერეომეტრიის აქსიომები. აქსიომების შედეგები. წრფეთა პარალელურობა. წერტილის კოორდინატები სივრცეში.	მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიულ ფიგურათა წარმოდგენისა და დებულებათა ფორმულირების ხერხების გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება. მოსწავლეს შეუძლია ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების მოძებნა. მოსწავლეს შეუძლია სიბრტყეზე გეომეტრიული გარდაქმნების კვლევა და მათი გამოყენება გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას.	22 სთ
საკონტროლო წერა №2		1 სთ

1	2	3
III თავი პარამეტრის შემცველი განტოლება. მოდულის შემცველი განტოლებისა და უტოლობის ამოხსნა. მაღალი ხარისხის განტოლების ამოხსნა. ირაციონალური განტოლება. უტოლობა. პარამეტრის შემცველი უტოლობა. უტოლობის ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით.	მოსწავლეს შეუძლია განტოლებათა და უტოლობათა სისტემების გამოყენება პრობლემების გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნა. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია სხვადასხვა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა ქვესისტემების ერთმანეთთან დაკავშირება. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესისტემების ერთმანეთისაგან განსხვავება. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მოქმედებების შედეგის შეფასება.	40 სთ
საკონტროლო წერა №3		1 სთ
IV თავი კოსინუსების თეორემა. კოსინუსების თეორემის შედეგები . სინუსების თეორემა . სამკუთხედის ბისექტრისის სიგრძისა და სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა. სამკუთხედების ამოხსნა (I) . სამკუთხედების ამოხსნა (II).	მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიულ ფიგურათა წარმოდგენისა და დებულებათა ფორმულირების ხერხების გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება. მოსწავლეს შეუძლია ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების მოძებნა.	14 სთ
საკონტროლო წერა №4		1 სთ

1	2	3
V თავი ნამდვილი რიცხვები. ირაციონალური გამოსახულების გამარტივება. გამოსახულების გამარტივება. გამოსახულების გამარტივება. თვლის სისტემები.	მოსწავლეს შეუძლია დისკრეტული მათემატიკის ელემენტების გამოყენება პრობლემის გადაჭრისას. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესისტემების ერთმანეთისაგან განსხვავება. მოსწავლეს შეუძლია სხვადასხვა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა ქვესისტემების ერთმანეთთან დაკავშირება. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესისტემების ერთმანეთისაგან განსხვავება. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მოქმედებების შედეგის შეფასება.	11 სთ
საკონტროლო წერა №5		1 სთ
VI თავი წესიერი მრავალკუთხედები. კუთხის რადიანული ზომა. სეგმენტი, სეგმენტის ფართობი. ვითამაშოთ.	მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიულ ფიგურათა წარმოდგენისა და დებულებათა ფორმულირების ხერხების გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია გეომეტრიული დებულებების დასაბუთება. მოსწავლეს შეუძლია ობიექტთა ზომებისა და ობიექტთა შორის მანძილების მოძებნა. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება.	15 სთ
საკონტროლო წერა №6		1 სთ

1	2	3
VII თავი ლოგიკური მსჯელობა. ოპერაციები გამონათქვამებზე. იმპლიკაცია. ეკვივალენცია. ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან. სტატისტიკის ელემენტები.	მოსწავლეს შეუძლია ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო თვისობრივი და რაოდენობრივი მონაცემების მოპოვება. მოსწავლეს შეუძლია თვისობრივ და რაოდენობრივ მონაცემთა მოწესრიგება და წარმოდგენა ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელი ფორმით. მოსწავლეს შეუძლია შემთხვევითობის ალბათური მოდელების საშუალებით აღწერა. მოსწავლეს შეუძლია სტატისტიკური და ალბათური ცნებებისა და პროცედურების გამოყენება ყოველდღიურ ვითარებაში. მოსწავლეს შეუძლია პრაქტიკული საქმიანობიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნა. მოსწავლეს შეუძლია სხვადასხვა პოზიციური სისტემების/ნამდვილ რიცხვთა ქვესისტემების ერთმანეთთან დაკავშირება.	13 სთ
საკონტროლო წერა №5		1 სთ
VIII თავი პერიოდული ფუნქცია. სინუსისა და კოსინუსის განმარტება. სინუს და კოსინუს ფუნქციის ზოგიერთი თვისება. $tg\alpha$ და $ctg\alpha$ ფუნქციები და მათი თვისებები. რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ტრიგონომეტრიული განტოლება. 1. $\sin x = a$ 2. $\cos x = a$ 3. $tg\, x = a$	მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციის თვისებების კვლევა და მათი თვისებების გამოყენება სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების შესასწავლად. მოსწავლეს შეუძლია მსჯელობა-დასაბუთების სხვადასხვა ხერხის გამოყენება. მოსწავლეს შეუძლია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულება და მოქმედებების შედეგის შეფასება.	18 სთ
საკონტროლო წერა №6		1 სთ

მოსწავლის შეფასების სისტემა

მოსწავლის შეფასების მიზანი, პრინციპები და მიდგომები

1. მოსწავლის შეფასების მიზანია სწავლა-სწავლების ხარისხის მართვა, რაც გულისხმობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებაზე ზრუნვასა და კონტროლს.
2. მოსწავლის აკადემიური მიღწევის შეფასება უნდა იყოს ხშირი და მრავალმხრივი; მან ხელი უნდა შეუწყოს: მოსწავლეთა მრავალმხრივ განვითარებას, მათი შესაძლებლობების გამოვლენას, სხვადასხვა პოტენციალის მქონე მოსწავლეთათვის თანაბარი პირობების შექმნას.
3. მოსწავლე უნდა შეფასდეს სხვადასხვა ფორმებით (ესსე, პროექტის მომზადება, ზეპირი გამოსვლა, ექსპერიმენტის ჩატარება, ცდის ჩატარება, წარმოდგენა, წერითი, ფერწერული ან სხვა ტიპის ნამუშევარი, არგუმენტირებული მსჯელობა და სხვ.).

განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასება

1. სკოლაში გამოიყენება ორი ტიპის შეფასება: განმსაზღვრელი და განმავითარებელი.
2. განმსაზღვრელი შეფასება აკონტროლებს სწავლის ხარისხს, ადგენს მოსწავლის მიღწევის დონეს ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში. განმსაზღვრელ შეფასებაში იწერება ქულა.
3. განმავითარებელი შეფასება აკონტროლებს თითოეული მოსწავლის განვითარების დინამიკას და ხელს უწყობს სწავლის ხარისხის გაუმჯობესებას. განმავითარებელი შეფასებისას გამოიყენება ისეთი საშუალებები, როგორიცაა სიტყვიერი კომენტარი, რჩევა-დარიგება, დაკვირვების ფურცელი, თვითშეფასებისა და ურთიერთშეფასების სქემა და სხვ.
4. განმავითარებელი და განმსაზღვრელი შეფასებების აღწერილობა

	განმავითარებელი	**განმსაზღვრელი**
მიზანი	სწავლის ხარისხის გაუმჯობესება; მოსწავლის განვითარების ხელშეწყობა	სწავლის ხარისხის გაკონტროლება; მოსწავლის მიღწევის დონის დადგენა ეროვნული სასწავლო გეგმით განსაზღვრულ მიზნებთან მიმართებაში; აკადემიური მოსწრების დონის განსაზღვრა
შეფასების საგანი	სწავლის პროცესი	სწავლის შედეგი
შეფასების შედეგად მიღებული გადაწყვეტილება	წინსვლის ხელშესაწყობად განსხვავებული აქტივობის შერჩევა, სწავლების სტრატეგიის შეცვლა, რჩევა-დარიგების მიცემა და სხვ.	მომდევნო ეტაპზე (კლასში/საფეხურზე) დაშვება/არდაშვება
წარმატების კრიტერიუმების განსაზღვრა	კონკრეტული მოსწავლის წინსვლის საფუძველზე (საკუთარ მიღწევებთან მიმართებით - რა დონეს ფლობდა, რა დონეს ფლობს)	იმის საფუძველზე, თუ რამდენად მიაღწია სტანდარტით განსაზღვრულ შედეგებს (ყველასათვის საერთო, სტანდარტით დადგენილ ნორმასთან მიმართებაში)
შეფასების საშუალებები	თვით/ურთიერთშეფასების რუბრიკა; კითხვარი; სიტყვიერი (ზეპირი/წერილობითი) კომენტარი; უნარის განვითარების დონის აღწერა.	ქულა

მოსწავლეთა აკადემიური მიღწევები ფასდება ათქულიანი სისტემით

ქულები	შეფასების დონეები
10	მაღალი
9	
8	საშუალოზე მაღალი
7	
6	საშუალო
5	
4	საშუალოზე დაბალი
3	
2	დაბალი
1	

საგნის სემესტრული ქულის შემადგენელი კომპონენტები

1. სემესტრის მანძილზე მოსწავლეები ფასდებიან შემდეგი სამი კომპონენტის მიხედვით:
   ა) საშინაო დავალება;
   ბ) საკლასო დავალება;
   გ) შემაჯამებელი დავალება.
2. შეფასების სამივე კომპონენტს ერთნაირი წონა აქვს.
3. საშინაო და საკლასო დავალებათა კომპონენტებში გამოიყენება როგორც განმსაზღვრელი, ასევე განმავითარებელი შეფასება.
4. შემაჯამებელი დავალების კომპონენტში აუცილებელია განმსაზღვრელი შეფასების გამოყენება.
5. ეროვნული სასწავლო გეგმა თითოეული საგნისათვის განსაზღვრავს სემესტრის განმავლობაში ჩასატარებელი შემაჯამებელი დავალებების სავალდებულო მინიმალურ რაოდენობას. ამ კომპონენტით შეფასებისას:

   ა) სტანდარტის მოთხოვნათა დასაკმაყოფილებლად, აუცილებელია შემაჯამებელი დავალების მრავალგვარი ფორმის გამოყენება (თხზულება, მოხსენება, რეფერატი, პროექტი, საველე-გასვლითი სამუშაო, ლაბორატორიული კვლევა, სახვითი და გამოყენებითი ხელოვნების ნიმუში და სხვ.);

   ბ) მოსწავლე ვალდებულია შეასრულოს კლასში ჩატარებული ყველა შემაჯამებელი დავალება (ეროვნული სასწავლო გეგმით დადგენილი სავალდებულო მინიმუმი და სკოლის მიერ დამატებით დადგენილი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში);

   გ) თუ მოსწავლე არ შეასრულებს რომელიმე შემაჯამებელ სამუშაოს გაცდენის გამო, სკოლა ვალდებულია, მისცეს მას გაცდენილი შემაჯამებელი დავალებების აღდგენის საშუალება. შემაჯამებელი აღდგენითი სამუშაოს ვადები და მისი ჩატარების ფორმა განისაზღვრება სასკოლო სასწავლო გეგმით.

განმსაზღვრელი შეფასების ქულათა სახეობები

ზოგადსაგანმანათლებლო სისტემაში გამოიყენება განმსაზღვრელი შეფასების შემდეგი სახეობები:
ა) საგნის მიმდინარე და შემაჯამებელი ქულები – საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი კომპონენტის ქულები, რომლებსაც მოსწავლე იღებს სემესტრის განმავლობაში;
ბ) საგნის სემესტრული ქულა – საგანში მიღებული შეფასება თითოეულ სემესტრში (სემესტრული გამოცდის ჩაბარების შემთხვევაში, გამოითვლება მისი გათვალისწინებით);

გ) საგნის წლიური ქულა – სემესტრული ქულებიდან გამომდინარე შეფასება საგანში. წლიურ ქულაში შეიძლება წლიური გამოცდის ქულაც აისახოს, თუ ასეთი გამოცდა გათვალისწინებულია სასკოლო სასწავლო გეგმით და სკოლის მიერ განსაზღვრულია, რომ მას გავლენა ექნება საგნის წლიურ ქულაზე;
დ) საერთო წლიური ქულა – საგნების წლიური ქულებიდან გამომდინარე შეფასება;
ე) საფეხურის საერთო ქულა – ზოგადი განათლების რომელიმე საფეხურის (დაწყებითი, საბაზო, საშუალო) საერთო შეფასება.

ქულების გამოანგარიშების წესი

1. საგნის სემესტრული ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) მოსწავლის მიერ სემესტრის განმავლობაში სამივე კომპონენტში (საშინაო, საკლასო და შემაჯამებელი) მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულების რაოდენობაზე;
ბ) მიღებული ქულა უნდა დამრგვალდეს მთელის სიზუსტით (მაგ., 6.15 მრგვალდება 6-მდე, 7.49 მრგვალდება 7-მდე, 8.5 მრგვალდება 9-მდე);
გ) იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლეს არა აქვს შესრულებული ყველა შემაჯამებელი დავალება, მისი სემესტრული ქულის გამოსაანგარიშებლად სამივე კომპონენტში მიღებული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს მიღებული ქულებისა და შეუსრულებელი შემაჯამებელი დავალებების რაოდენობის ჯამზე.
2. საგნის წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) საგნის წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად საგნის სემესტრული ქულების ჯამი უნდა გაიყოს ორზე;
ბ) საგნის წლიური ქულა მრგვალდება მთელის სიზუსტით (მაგ., 7.25 მრგვალდება 7-მდე, 4.49 მრგვალდება 4-მდე, 9.5 მრგვალდება 10-მდე);
გ) თუ სასკოლო სასწავლო გეგმა ითვალისწინებს წლიური გამოცდის ჩატარებას და განსაზღვრულია, რომ ამ გამოცდის ქულაც აისახება წლიურ ქულაზე, მაშინ საგნის წლიური ქულა სამი (ორი - საგნის სემესტრული და ერთი - გამოცდის) ქულის საშუალო არითმეტიკულია (დამრგვალებული მთელის სიზუსტით).
3. საერთო წლიური ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) საერთო წლიური ქულის გამოსაანგარიშებლად უნდა შეიკრიბოს ეროვნული სასწავლო გეგმით კონკრეტული კლასისთვის გათვალისწინებული ყველა სავალდებულო საგნის წლიური ქულა (საშუალო საფეხურზე, აგრეთვე, სასკოლო სასწავლო გეგმით განსაზღვრული არჩევითი საგნების ქულები სავალდებულო საგნების წლიურ ქულებთან ერთად) და ჯამი გაიყოს ქულების რაოდენობაზე;
ბ) საერთო წლიური ქულა მრგვალდება მეათედის სიზუსტით (მაგ., 7.14 მრგვალდება 7.1-მდე, 8.15 მრგვალდება 8.2-მდე).
4. საფეხურის საერთო ქულის გამოანგარიშების წესი:
ა) საფეხურის საერთო ქულა გამოითვლება იმავე პრინციპით, რომლითაც ითვლება საერთო წლიური ქულა: ჯამდება საფეხურის მანძილზე ნასწავლი ყველა საგნის წლიური ქულა (მაგ. მათემატიკა მე-10 კლასი, მათემატიკა მე-11 კლასი, მათემატიკა მე-12 კლასი, ქართული მე-10 კლასი, ქართული მე-11 კლასი, ქართული მე-12 კლასი და ა.შ.) და ჯამი იყოფა ქულების საერთო რაოდენობაზე;
ბ) საფეხურის საერთო ქულა მრგვალდება მეათედის სიზუსტით (მაგ., 6.43 მრგვალდება 6.4-მდე, 7.58 მრგვალდება 7.6-მდე).

გთავაზობთ რამდენიმე გაკვეთილის სანიმუშო სცენარს

IV თავი. §5 სამკუთხედების ამოხსნა

რეზიუმე: მოსწავლეები გაეცნობიან ცნებას —„სამკუთხედის ამოხსნა“.

აქტივობის მიზანი:
1. მოსწავლე შეძლებს სამკუთხედების ამოხსნას;
2. შეძლებს იმსჯელოს თუ რა მონაცემი არის საკმარისი სამკუთხედის მოხსნისათვის ამოცანის ამოსახსნელად.
3. შეძლებს ამოარჩიოს გზა, რომ ამონახსნი იყოს ცალსახა. მაგალითად ცნობილია სამკუთხედის გვერდები, იპოვეთ კუთხეები. ჯერ კოსინუსების თეორემით ვიპოვით უდიდეს კუთხეს. (რადგან $\sin\alpha=1/2$ პირობიდან ვერ დავადგენთ თუ $\alpha=150°$) შემდეგ კი სინუსების თეორემით ვიპოვით დანარჩენ კუთხეებს.

სავარაუდო ხანგრძლივობა (2სთ).

I გაკვეთილი

აქტივობის აღწერა:

1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით (5წთ);
2. მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს იფიქრონ პარაგრაფის დასაწყისში მიცემულ ინდივიდუალურ კითხვებზე (5წთ);
3. შემდეგ განიხილავენ ინდივიდუალურ შეკითხვებს და დისკუსიის საფუძველზე აყალიბებენ დასკვნას თუ სამკუთხედის სახის მიხედვით რამდენი მონაცემია საკმარისი სამკუთხედის ამოხსნისათვის (10წთ).
4. მასწავლებელი აძლევს წყვილებს სახელმძღვანელოში მოცემულ დავალებას (5წთ)
5. შემდეგ განიხილავენ პარაგრაფში ამოხსნილ ამოცანებს (15წთ)
6. მასწავლებელი აჯამებს შედეგებს და მოსწავლეებს აძლევს დავალებას 1, 2, 3 და 4.

II გაკვეთილი.
აქტივობის აღწერა:

1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით (5-10 წთ).
2. მასწავლებელი სთავაზობს გაამუქონ მოცემულობა (განუმარტავს მათ მიზეზს, რის გამოც გაფერადება შედეგს მოგვცემს) და დაასახელონ ამოხსნის გზები.
3. შემდეგ ხდება ამოხსნების პრეზენტაცია თითოეული შემთხვევისათვის ცალ-ცალკე (20წთ).
4. მასწავლებელი აჯამებს შედეგებს და აძლევს საშინაო დავალებას 5-11. (5-10წთ).

V თავი. §3. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი

რეზიუმე: მოსწავლეები გაეცნობიან რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებებს:
აქტივობის მიზანი:

1. შეძლონ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის ფესვის სახით წარმოდგენა;
2. შეძლონ ფესვის წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით წარმოდგენა;
3. შეძლონ წილადმაჩვენებლიანი და ფესვიანი გამოსახულების გამარტივება;
4. გაეცნონ რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებებს.

სავარაუდო ხანგრძლივობა 2სთ.

აქტივობის აღწერა:

1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით (5წთ);
2. მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს პარაგრაფის დასაწყისში მათთვის განკუთვნილი ინდივიდუალური დავალების შესრულებას (5წთ);
3. მასწავლებელი აწვდის მოსწავლეებს რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის განმარტებას და ამის სფუძველზე განიხილავენ ინდივიდუალურ შეკითხვებს (5წთ).
4. მასწავლებელი ამტკიცებს $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ თვისებას (5წთ),
5. მასწავლებელი სთხოვს მოსწავლეებს დაამტკიცონ დანარჩენი თვისებები დამოუკიდებლად და აძლევს მათ დროს (10წთ)
6. ხდება დამტკიცებული თვისებების პრეზენტაცია (10წთ)
7. მასწავლებელი აჯამებს შედეგებს და აძლევს დავალებას №1-6 და №16-18.

II საათის განმავლობაში ხდება შესრულებული მასალის გაღრმავება, დავალება №7-15.

VI თავი. §1. ვითამაშოთ

რეზიუმე:
მოსწავლეები უფრო ღრმად გაეცნობიან წესიერ მრავალკუთხედებს. შეძლებენ ღერძული და ცენტრული სიმეტრიის პრაქტიკულად გამოყენებას.
აქტივობის მიზანი:

- სიმეტრიის პრაქტიკული გამოყენება
- კვლევის უნარის განვითარება;
- გაითავისონ სიმეტრიის და წესიერი მრავალკუთხედების არსი.

სავარაუდო ხანგრძლივობა 1 სთ.

აქტივობის აღწერა:

1. მასწავლებელი ახსენებს ღერძულ და ცენტრულ—სიმეტრიული ფიგურების განმარტებას (5 წთ);
2. ყოფს კლასს ჯგუფებად და სთხოვს, რომ თითოეული თამაშისთვის ჩამოაყალიბონ მომგებიანი სტრატეგია. განუმარტავს მათ, რომ თითოეული ამოცანა ფასდება 4 ქულით და აძლევს მოსამზადებლად დროს (20წთ).
3. მასწავლებელი თხოვს ჯგუფებს სათითაოდ ამოირჩიონ ამოცანა და გადაწყვიტონ თავად უნდა დაიწყონ თამაში თუ მოწინააღმდეგემ. თამაშდება 4 ამოცანა. თითოეულ თამაშზე ჯგუფიდან გამოდის ერთი წარმომადგენელი (15 წთ).

4. მასწავლებელი აჯამებს შედეგებს და აცნობს ჯგუფებს, შემდეგ დამარცხებული გუნდის წარმომადგენელს აძლევს უფლებას დარჩენილ ერთ თამაშში ამოირჩიოს 'სვლა" და თამაშდება მეხუთე თამაში (5წთ).

ამოცანები:

1. იგებს პირველი მოთამაშე.

სტრატეგია: პირველი მოთამაშე ავლებს ერთ-ერთ დიაგონალს, რომელიც ფიგურის სიმეტრიის ღერძია. შემდეგ ყოველთვის აკეთებს მეორე მოთამაშის სვლის სიმეტრიულ სვლას ამ ღერძის მიმართ. ცხადია თუ მეორე მოთამაშე გააკეთებს სვლას, იარსებებს მისი სიმეტრიული სვლაც. ანუ პირველი მოთამაშე გააკეთებს ბოლო სვლას და შესაბამისად მოიგებს.

2. ა) და ბ) შემთხვევებშიც იგებს მეორე მოთამაშე. სტრატეგია: პირველი მოთამაშის სვლის შემდეგ მეორე აფერადებს ისეთ ერთ ან ორ წვეროს, რომ გაფერადებულ წვეროებს ორივე მხარეს დარჩეს წვეროების თანაბარი რაოდენობა. შემდეგ აკეთებს პირველი მოთამაშის სვლების სიმეტრიულ სვლას ცენტრის მიმართ.
3. თამაში 1-ის ანალოგიურია;
4. თამაში 2-ის ანალოგიურია;
5. იგებს პირველი მოთამაშე.

სტრატეგია: პირველი მოთამაშე აფერადებს ცენტრალურ უჯრას. შემდეგ აკეთებს პირველი მოთამაშის სვლის სიმეტრიულ სვლებს ცენტრალური უჯრის მიმართ.

VII თავი. §5. ამოცანები ალბათობის თეორიიდან

რეზიუმე: მოსწავლეები ეცნობიან ამოცანებს ალბათობის თეორიიდან.

აქტივობის მიზანი:

· მოსწავლეებმა შეძლონ დასმული ამოცანისთვის დათვალონ ალბათობა.

· ნახონ, როგორ გამოიყენება მათემატიკის, კერძოდ ალბათობის თეორიის ელემენტები ამა თუ იმ სიტუაციაში, და სხვა დისციპლინებში დასმულ ამოცანებში.

სავარაუდო ხანგრძლივობა 3 გაკვეთილი.

I გაკვეთილი

აქტივობის აღწერა: ეს გაკვეთილი ჩავატაროთ როგორც ინტეგრირებული ფიზიკის მასწავლებელთან ერთად ფიზიკის კაბინეტში.

1. მათემატიკის მასწავლებელი დასვამს პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას. გაახსენებს მოსწავლეებს ალბათობის განმარტებას და შესაძლო შემთხვევების დათვლას. (მაგალითად რამდენი 5-ნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ციფრებით 1, 2, 3). (5 წთ)
2. ფიზიკის მასწავლებელი გაახსენებს მოსწავლეებს მიმდევრობით და პარალელურ შეერთებას, მოსწავლეები მასწავლებლის დახმარებით ჩამოაყალიბებენ, თუ რა შემთხვევაში შეიძლება გადიოდეს დენი რომელიღაც A წერტილიდან B წერტილამდე და წინასწარ გამზადებულ სქემაზე ნახავენ რა შემთხვევაში გადის და რა შემთხვევაში არა დენი. (5 წთ)
3. შემდეგ მასწავლებელი სთხოვს რომელიმე მოსწავლეს, რომ დათვალოს ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა და ჩამოწეროს დაფაზე. (5 წთ)
4. მათემატიკის მასწავლებელი ავალებს მოსწავლეებს უპასუხონ პარაგრაფში მოცემულ ინდივიდუალურ შეკითხვებს, რითაც ფაქტიურად პასუხობენ ამოცანა 1-ს. (5 წთ)

5. მათემატიკის მასწავლებელი ანაწილებს წყვილებში (წყვილს ერთი ამოცანა) პარაგრაფში მოცემული წყვილებისათვის განკუთვნილი სამუშაოს ა, ბ, გ და დ შემთხვევებს და აძლევს დროს საფიქრელად. (5 წთ)
6. შემდეგ ხდება ამოხსნილი ამოცანების პრეზენტაცია. (10 წთ)
7. ფიზიკის მასწავლებელი ჩამოაყალიბებს ამოცანა 2-ს და ეხმარება მოსწავლეებს გასცენ პასუხი ინდივიდუალურ შეკითხვებს. (7-8 წთ).
8. მათემატიკის მასწავლებელი აძლევს მოსწავლეებს საშინაო დავალებას №1-6.

II გაკვეთილი

აქტივობის აღწერა:

1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით. სასურველია ყველა სავარჯიშო გაირჩ-ეს კლასში. (10-15 წთ).
2. მასწავლებელი დასვამს ამოცანა 3-ს და მოსწავლეების დახმარებით ავსებს ხის დანარჩენ წიბოებს ალბათობით და აყალიბებს პირობითი ალბათობის ცნებას. (10 წთ).
3. მასწავლებელი ავალებს წყვილებს იფიქრონ პარაგრაფში მოცემულ წყვილებისათვის გან-კუთვნილ ამოცანაზე და აძლევს დროს. (5 წთ)
4. ხდება შესრულებული დავალების პრეზენტაცია. (5 წთ)
5. მასწავლებელი არჩევს ამოცანა 5-ს და სვამს პარაგრაფში მოცემულ ინდივიდუალურ შეკითხვებს. (10 წთ)
6. მასწავლებელი შეაჯამებს გაკვეთილს და მოსწავლეებს აძლევს დავალებას 6-11.

III გაკვეთილი სასურველია ჩატარდეს ინტეგრირებულად ბიოლოგიის მასწავლებელთან ერ-თად.

აქტივობის აღწერა:

1. გაკვეთილი იწყება საშინაო დავალების ანალიზით. სასურველია ყველა ამოცანა განვიხი-ლოთ. (10-15 წთ)
2. შემდეგ მათემატიკის მასწავლებელი დასვამს ამოცანა 6-ს და სთხოვს ბიოლოგიის მასწავ-ლებელს, რომ მოუთხროს მოსწავლეებს ბაქტერიებზე, მათი გამრავლების და არსებობის ხელსაყრელ პირობებზე. ურჩიოს მოსწავლეებს, თუ პროფილაქტიკის რა ზომები შეიძლება მიიღონ ბაქტერიებისაგან თავდასაცავად. (5 წთ)
3. ბიოლოგიის მასწავლებელი აწვდის მოსწავლეებს ინფორმაციას ბაქტერიებზე. (15 წთ)
4. მათემატიკის მასწავლებელი წინასწარ გამზადებული პლაკატების დახმარებით ახდენს ამოცანა 6-ის ამოხსნის პრეზენტაციას და აძლევს მოსწავლეებს საშინაო დავალებად დარ-ჩენილ სავარჯიშოებს. (10 წთ)

I თავი

1. ფუნქცია. ფუნქციის თვისებები

1.1. შესავალი

რეზიუმე:

პარაგრაფი იწყება წყვილებისთვის განკუთვნილი სავარჯიშოთი. სასურველია, სანამ მასწავლებელი დაავალებს მოსწავლეებს, რომ იფიქრონ სავარჯიშოზე, გავიმეოროთ ფუნქციის განმარტება წრფივი ფუნქცია და მისი თვისებები.

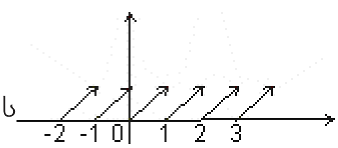
ამოხსნები, მითითებები:

3. S(x)=50(x–150)–800.

4. $S(x)=x\cdot\sqrt{4R^2-x^2}$

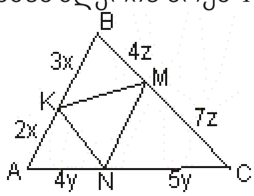
5. $S_{MNK}=\dfrac{S_{ABC}}{4}=\dfrac{x}{4}$

6. მოცემული შესაბამისობა ცხადია, ფუნქციაა, მისი განსაზღვრის არეა R, მნიშვნელობათა სიმრავლე [0;1), ხოლო გრაფიკია:



7. განსაზღვრის არეა N, მნიშვნელობათა სიმრავლე $\{0;1;2;3;4\}$.

8.



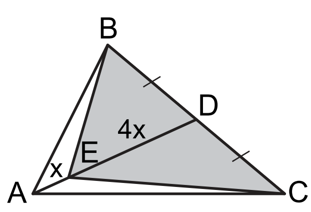
$$S_{AKN}=\frac{2x\cdot 4y}{5x\cdot 9y}S=\frac{8}{45}S$$

$$S_{KBN}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 11}S=\frac{12}{55}S$$

$$S_{MNC}=\frac{7\cdot 5}{11\cdot 9}S=\frac{35}{99}S$$

9. ჯერ ვნახოთ რა პროპორციით უნდა შევურიოთ I და II ბალონებიდან ხსნარები, რომ მივიღოთ 12%-იანი ხსნარი.
I- m ლიტრი, II- n ლიტრი, მივიღეთ ტოლობა 10m+15n=12(m+n); $2m=3n$ ე.ი. $\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{2}$, ე.ი. უნდა მივიღოთ 3:2 შეფარდებით ხსნარი და ავიღოთ მისი 1 ლ. I ბალონიდან 3 ლიტრიანი ჭურჭლით ავიღოთ 3ლ 10%-იანი ხსნარი და ჩავასხათ 4 ლიტრიან ჭურჭელში. ავავსოთ 5 ლ-იანი 15%-იანი ხსნარით და გადმოვიღოთ 3 ლიტრიანში, 5 ლიტრიანში დარჩა 2 ლ ხსნარი, დავუმატოთ მას უკვე გადმოსხმული 3 ლ 10%-იანი, მივიღეთ 5 ლ 12%-იანი ხსნარი. ავავსოთ 4 ლ-იანი ჭურჭელი და დაგვრჩება 1ლ 12%-იანი.

10.



$$S_{BED}=\frac{4}{5}S_{ABD}=\frac{2}{5}S_{ABC}$$

$$S_{EDC}=S_{BED}=\frac{8}{10}S_{ABC}$$

$$S_{BEC}=\frac{4}{5}S_{ABC}=\frac{4}{5}\cdot 40=32.$$

1.2 ლუწი და კენტი ფუნქციები

რეზიუმე:

სასურველია გავიხსენოთ ცენტრული და ღერძული სიმეტრია, დავხაზოთ ცენტრულსიმეტრიული და ღერძულსიმეტრიული ფიგურები. ვთხოვოთ მოსწავლეებს დახაზონ ფიგურა, რომელსაც აქვს სიმეტრიის ღერძი და მერე ამ ღერძზე გადაკეცონ და დარწმუნდნენ, რომ ფიგურის ორივე ნაწილი ერთმანეთს შეუთავსდება. შემდეგ ვავალებთ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ინდივიდუალურ სამუშაოს.

ამოხსნები, მითითებები:

5. მაგალითის ამოხსნამდე შევადგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების კომბინაციების ცხრილი

ლ ± ლ — ლ

ლ ± კ — არც ლუწი, არც კენტი

კ + კ — კ

ლ × ლ — ლ

კ × კ — ლ

ლ × კ — კ.

6. მოსწავლეებმა ჩამოაყალიბონ როგორია ლუწი და კენტი ფუნქციების გრაფიკები, ამის შემდეგ შეასრულონ ამოცანაში მოცემული დავალება.

7. შეუძლებელია, იმიტომ რომ თუ ფუნქცია კენტია და მის განსაზღვრის არეში შედის წერტილი 0, მაშინ f(0)=0.

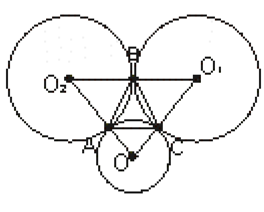
8. იხ. 5.

9. y-k+b ფუნქცია კენტია, თუ b=0 და ლუწია თუ k=0.

10. ა) $f(-x)=f(x)$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $f(-x)+\varphi(-x)=f(x)+\varphi(x)$.

დ) $f(-x)=-f(x)$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $f(-x)+\varphi(-x)=-f(x)+\varphi(x)$ არც კენტია, არც ლუწი.

11. $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$, ე.ი. $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$.

12. 

მოც. $(O_1;R)$, $(O_2;R)$, $(O;r)$ წრეწირები.

უ.ვ. S_{ABC}. $\Delta AOC \sim \Delta O_2OO_1$.

$\frac{AC}{O_1O_2}=\frac{1}{4}$, ე.ი. $AC=\frac{3}{2}$. OB=$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

AOC სამკუთხედის სიმაღლე ტოლია $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ე.ი. ΔABC-ს სიმაღლე $\frac{3}{4}\sqrt{7}$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{7}=\frac{9\sqrt{7}}{16}$.

1.3 ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა

პარაგრაფი იწყება წყვილებისათვის განკუთვნილი ინდივიდუალური სამუშაოთი, რომლის გაკეთების შემდეგ უკვე შეგვიძლია ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა განვმარტოთ.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) y=2x–3. E(y)=(11;3). ზრდადია;

ბ) y=–x+1. E(y)=[–1;3]. კლებადია;

გ) $y=|x-2|$. E(y)=[0;1) კლებადია x∈[0;2) შუალედში, (2;3) შუალედში ზრდადია;

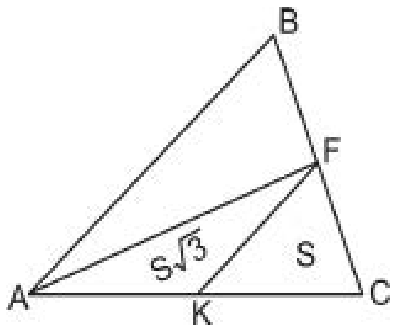
დ) $y=x^2-2x-3$ E(y)=[–4;5]; x∈[–2;1] კლებადია, x∈(1;3] ზრდადია.

8. ა) y=3x–1, $x_2>x_1$. $y_2-y_1=(3x_2-1)-(3x_1-1)=3(x_2-x_1)>0$. ფუნქცია ზრდადია.

გ) $y=-x^2-3$; $x_2>x_1$ ე.ი. $y_2-y_1=(-x_2^{\ 2}-3)-(-x_1^{\ 2}-3)=-(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2})=(x_1-x_2)(x_2+x_1)$. $x_1-x_2<0$, თუ $x\in(-\infty;0)$ $x_2+x_1<0$ ე.ი. ნამრავლი დადებითია, ფუნქცია ზრდადია თუ $x\in[0;\infty)$, მაშინ $x_2+x_1>0$, ფუნქცია კლებადია.

10. გავახსენოთ მოსწავლეებს რთული პროცენტის ფორმულა $a(1+\frac{n}{100})^m$.

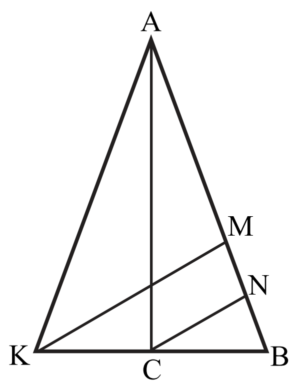
11.



$$\frac{AK}{KC}=\frac{AF}{FC}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{S_{AFK}}{S_{KFC}}$$

$2(S\sqrt{3}+S)=30\sqrt{3}$. $S_{\Delta AFK}=\frac{45(\sqrt{3}-1)}{2}$.

12.



მოც. ∠A=15°; AB=20.
უ.ვ. CN
მივადგათ ΔACK=ΔACB, მივიღეთ AKB ტოლფერდა სამკუთხედი. დავუშვათ KM⊥AB, ΔAKM-ში ∠A=30°. ე.ი.

KM=$\frac{AK}{2}$=10. ცხადია, CN=$\frac{KM}{2}$=5.

1.4 ფუნქციის ნულები. ნიშანმუდმივობის შუალედები

მასწავლებელი დაფაზე ხაზავს ფუნქციის გრაფიკს და მოსწავლეებს სთხოვს, რომ შეამოწმონ: აბსცისათა ღერძის მიმართ ზედა (ქვედა) ნახევარსიბრტყეში მდებარე გრაფიკის წერტილების კოორდინატების ნიშნის დადგენა. მერე სთხოვს გამოთქვან ვარაუდი.

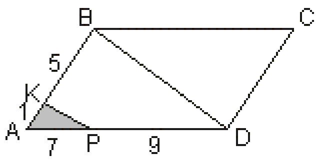
ამოხსნები, მითითებები:

4. განვიხილოთ ნახაზი 1.
ა) D(y)=[–4;4]; ბ) E(y)=[–2;5]; გ) (–4;0); (3;0); (0;2); დ) ფუნქცია ზრდადია $x \in [-4;-2]$, ფუნქცია კლებადია $(-2,-1) \cup (2;4)$; თუ $x \in [-1;2]$ ფუნქცია მუდმივია. ე) y>0, როცა $x \in (-4;3)$ y<0, როცა $x \in (3;4]$; ვ) არც ლუწია, არც კენტი. ზ) f(x)=1. x=–3,6; 2,5. თ) f(x)>1 x∈(–3,6; 2,5), f(x)<2 x∈[–4;–3,2)∪(2;4]; ი) ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 5, როცა x=–2. უმცირესი –2, როცა x=4.

5. ა) $f(x)=-x^2-4x$; ბ) $f(x)=x^2+4x$.

6. ა) ლურჯ კამათელზე მოსულ რიცხვს მინუს ყვითელ კამათელზე მოსული რიცხვი ტოლი – 1. შესაძლო ხდომილობებია (1;2) (2;3) (3;4) (4;5) (5;6). ალბათობა $\frac{5}{36}$.

ბ) $\frac{5}{36}$; გ) (6;1) ალბათობა $\frac{1}{36}$.

7. 

$$\frac{S_{AKP}}{S_{ABD}} = \frac{1 \cdot 7}{6 \cdot 16} = \frac{7}{96}$$
$$\frac{S_{AKP}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{192}$$

8. ცხადია, ამ ორი სამკუთხედიდან ერთ-ერთმა მაინც უნდა დაფაროს მოცემული სამკუთხედის რომელიმე გვერდი მთლიანად. მაშასადამე, ამ სამკუთხედის გვერდის სიგრძე არაა ნაკლები თავდაპირველის გვერდის სიგრძეზე.

9. f(x)=2x–1. $y = f(f(x)) = 2(2x-1)-1 = 4x-3$.

10. ა) $y = f(x)$ ფუნქცია ზრდადია ე.ი. $(x_2 > x_1) \Rightarrow y_2 > y_1$. განვიხილოთ $y = f(f(x))$ ფუნქცია $y_2 = f(x_2)$; $y_1 = f(x_1)$; $y_2 - y_1 > 0$; ე.ი. $f(y_2) - f(y_1) > 0$.
ბ) განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც f(x) კლებადია. $(x_2 > x_1) \Rightarrow y_2 < y_1$, რადგან f კლებადია $f(y_2) > f(y_1)$ ე.ი. $f(f(x))$ ფუნქცია ზრდადია.

2. წრფივი ფუნქცია

რეზიუმე:

სანამ უშუალოდ სავარჯიშოებზე გადავიდოდეთ, მოსწავლეებს გავახსენოთ ზოგადად წრფივი ფუნქცია, მისი გრაფიკი. განვიხილოთ y=kx+b ფუნქციის ყველა კერძო შემთხვევა. დავსვათ კითხვები ფუნქციის გრაფიკის მდებარეობის შესახებ საკოორდინატო მეოთხედებში, ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობაზე, ღერძებთან კვეთის წერტილებზე. შევეცადოთ მოსწავლეებმა ჩაატარონ წრფივი ფუნქციის გამოკვლევა.

ამოხსნები, მითითებები:

8. ა) განვიხილოთ ნახაზზე გამუქებული სამკუთხედი, რომლის კათეტებია: $|y_2-y_1|$ და $|x_2-x_1|$.
ბ) ა)-ს გათვალისწინებით ერთმანეთს გავუტოლოთ k-ს შესაბამისი გამოსახულებები.

9. ა) $k_1=k_2$; $b_1\neq b_2$; ბ) $k_1\neq k_2$; $b_1=b_2$; გ) $k_1=k_2$; $b_1=b_2$.

11. ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 5x + 10 \end{cases}$ (–3;–5).

13. მოცემული ფუნქციაა $y = -\frac{5}{3}x + 5$, საძიებელი ფუნქციის $k = -\frac{5}{3}$, ე.ი. $y = -\frac{5}{3}x + b$ და გადის (1;1) წერტილზე, ე.ი. $b = \frac{8}{3}$.

14. $7n^3+5n=6n^3+6n+n^3-n=6n(n^2+1)+n(n-1)(n+1)$. სამი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლი ყოველთვის იყოფა 6-ზე, შეიძლება გაკეთდეს ნაშთებითაც.

15. ნებისმიერი 10 ნატურალური რიცხვიდან ორის 9-ზე გაყოფის ნაშთი მაინც ემთხვევა ერთმანეთს.

16. $3(2y^2-x^2)=5$ მარჯვენა მხარე არ იყოფა 3-ზე.

17. დ) $\left[\begin{array}{l} x = 2x - 3 \\ x = 3 - 2x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

4. კვადრატული ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა

რეზიუმე:

ამ პარაგრაფის შესწავლის შემდეგ შესაძლებელია დავავალოთ მოსწავლეებს თავად დასვან ცხოვრებისეული ამოცანა, სადაც გამოვიყენებთ შესწავლილ მასალას. მაგალითად ასაშენებელია 100 მ² ფართობის მართკუთხედის ფორმის იატაკის მქონე შენობა. დაადგინეთ მართკუთხედის გვერდების შეფარდება, რომლის დროსაც დაიხარჯება მინიმალური რაოდენობის მასალა (სიმაღლე მუდმივია).

ამოხსნები, მითითებები:

1. $S = a(18-a) = -a^2 + 18a$ უდიდესია, როცა $a = \frac{-18}{-2} = 9$, ე.ი. მართკუთხედი კვადრატია.

2. $y = x(x-2) = x^2 - 2x$ ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა x=1.

4. $y = x(20-x) = -x^2 + 20x$ x=10.

5. $y = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$ x=5.

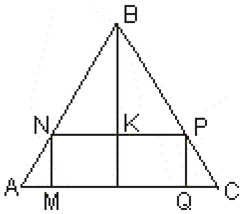
9. გ) $y=x^2+6x-4$ $x\in[-2;2)$ $x_0=-3$, ე.ი. $y_{\min}(-2) = -12$. უდიდესი არ არის .
დ) უმცირესი −18 უდიდესი არ არის.
ე) $x_0=-2\in[-4;-1]$, ე.ი. ფუნქციის უდიდესია y(02)=11; უმცირესი, როცა x=1, y=2.

10. ა) $g(3)=-\frac{9}{4}+3=\frac{3}{4}$, $\quad S=3\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$.

ბ) $S=x(-\frac{3}{4}x+3)=-\frac{3}{4}x^2+3x \qquad x_o=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2$.

11. შევადგინოთ მანქანებს შორის მანძილის გამოსათვლელი გამოსახულება $S=(12-40t)^2+(5+60t)^2$ და ვიპოვოთ t, როცა ეს გამოსახულება უმცირესია.

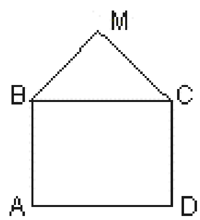
13. MN=x, $BK=\frac{a\sqrt{3}}{2}-x$. გამოვსახოთ NP, მსგავსი $NP=\frac{a\sqrt{3}-2x}{\sqrt{3}}$.



$$S=x(a-\frac{2}{\sqrt{3}}x)=-\frac{2}{\sqrt{3}}x^2+ax$$

$$x_0=\frac{-a}{-\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{a\sqrt{3}}{4} \qquad NP=a-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a}{2}$$

14.



$$BM=MC=BC=AD\equiv x \qquad P=2AB+3x \qquad AB=\frac{P-3x}{2}$$

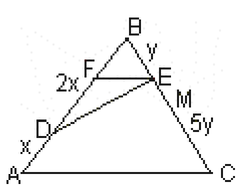
$$S=S_{ABCD}+S_{BMC}=\frac{P-3x}{2}\cdot x+\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \qquad S(x)=-\frac{6-\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{P}{2}x$$

$$x_0=\frac{\frac{P}{2}}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}}=\frac{P}{6-\sqrt{3}} \qquad AB=\frac{P}{2}-\frac{3P}{2(6-\sqrt{3})}=\frac{3-\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})}P$$

15. h=14–a. $\quad S=\frac{a(14-a)}{2}=-\frac{1}{2}a^2+7a$.

უდიდესი ფართობი ხდება, როცა a=7, ე.ი. h=7. უდიდესი ფართობი=24,5.

18.



უ.ვ. $\frac{S_{BDE}}{S_{BEF}}$

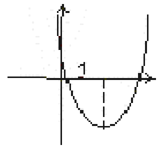
$$\frac{S_{BDE}}{S_{BEF}}=\frac{BD}{BF}\,\frac{BF}{AB}=\frac{1}{6} \quad BF=\frac{AB}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2} \text{ ე.ი. } \frac{BD}{BF}=\frac{2x}{\frac{x}{2}}=\frac{4}{1}.$$

19. $f(n)=\frac{n(n-3)}{2}$.

21.

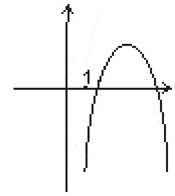
n	n^2	n-1	n+1
0	0		
1		0	
2	0		
3			0

$n^2(n-1)(n+1)$, შეიძლება მსჯელობით: თუ n ლუწია, მაშინ n^2⋮4, თუ ნ კენტია, მაშინ n–1 და n+1 ლუწია, ე.ი. მათი ნამრავლი გაიყოფა 4-ზე.

23. 

ა) $a>0$ ფესვები $x=1$ წერტილის სხვადასხვა მხარესაა.

ბ) $a<0$ ფესვები $x=1$ წერტილის მარჯვნივ მდებარეობს.



5. უბან-უბან წრფივი ფუნქცია

რეზიუმე:

მოსწავლეს შევადგენინოთ პარაგრაფის დასაწყისში დასმული ამოცანის შესაბამისი ფუნქცია და დაფაზე დავახაზინოთ მისი გრაფიკი. გარჩეული მაგალითების განხილვის შემდეგ განვმარტოთ უბან-უბან წრფივი ფუნქცია. მოსწავლეებს ამ ფუნქციის მაგალითებად შეუძლიათ მოიყვანონ მოდულიანი ფუნქციის მაგალითები $y=|x-2|$, $y=|x+2|$ ან $y=|x-2|+|x+2|$ ტიპის ფუნქციები.

ამოხსნები, მითითებები:

2. $y=|x-2|+|x+3|=\left[\begin{array}{l} -2x-1, \text{ თუ } x<-3 \\ 5, \text{ თუ } -3\le x\le 2 \\ 2x+1, \text{ თუ } x>2 \end{array}\right.$, ე.ი. $y(-5)=9$; $y(-3)=5$; $y(8)=17$.

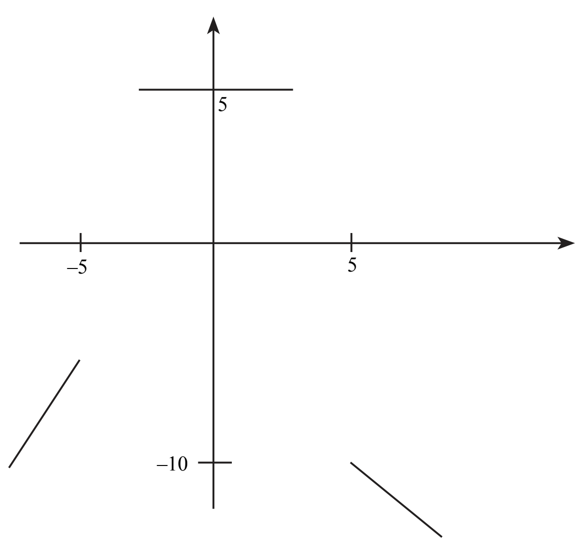
3. ა) Oy ღერძთან კვეთის წერტილის საპოვნელად დავასახელოთ ფუნქცია, რომელიც შეესაბამება 0-ის შემცველ შუალედს. ეს არის $y=x-8$, ე.ი. $(0;-8)$. Ox ღერძთან კვეთისთვის შევამოწმოთ თითოეული ფუნქცია.

$2x-5=0$ $x=2{,}5\notin(-\infty;-5)$

$x-8=0$ $x=8\notin(-5;5)$ ე.ი. Ox ღერძთან კვეთა ფუნქციას არ აქვს.

$-3x+5=0$ $x=\frac{5}{3}\notin(5;\infty)$.

ავაგებინოთ შესაბამისი გრაფიკი.



4. ა) $x\in(0;\infty)$. ბ) $x\in(0;\infty)$.

5. ავაგოთ გრაფიკი:
თუ $a<0$, არც ერთი ამონახსნი
თუ $a=0$, $x\in[0;2]$
თუ $a>0$, ორი ამონახსნი

6. თუ $x<2$, $y<3$, თუ $x>2$, $y<3$,
ე.ი. $a\in[3;\infty)$

7. $S(x)=x^2-\pi$. **8.** $10n+7$ ნაშთია 2.

6. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქცია

რეზიუმე:

შესაძლებელია, რომ მოსწავლეებმა თავად შეძლონ $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის აგება. სასურველია დავსვათ შეკითხვები. განვ: $k>0$ შემთხვევა:
1) თუ $x>0$, მაშინ რა ნიშანი ექნება y-ს?
2) ღერძებთან კვეთის საპოვნელად $x=0$; $y=0$ ჩასმა უნდა გავაკეთოთ. ცხადია, არც ერთ შემთხვევაში განტოლება არ ამოიხსნება.

დასკვნები:

ა) თუ $x>0$, მაშინ $y>0$. ე.ი. გრაფიკი მდებარეობს I მეოთხედში.
ანალოგიურად დავასკვნით, რომ როცა $x<0$, მაშინ $y<0$ და გრაფიკი მდებარეობს III მეოთხედში.
ბ) გრაფიკს არა აქვს კვეთა ღერძებთან, შემდეგ განვიხილავთ $k<0$ შემთხვევას.

ამოხსნები, მითითებები:

7. ა) $m=\frac{1}{3}$; ბ) $m=\frac{1}{-2}$; გ) $-1=\frac{1}{m}$ $m=-1$; დ) $-32=\frac{1}{m}$ $m=-\frac{1}{32}$.

8. $-2048=\frac{a}{-0,25}$ $a=512$, $m=2045$, $n=4096$.

9. 8სთ — 7 მუშა
7სთ — x მუშა $8\cdot7=7x$ $x=8$ მუშა.

8სთ — 14 მუშა
7სთ — x მუშა $x=16$.

11. $I=\frac{U}{R}$

12. $t=\dfrac{20}{n}$ t — დრო, n — ოპერატორების რაოდენობა.

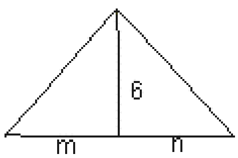
13. $V_{\text{საშ.}}=\dfrac{(20+6)}{(\frac{20}{40}+\frac{6}{4})}$=13კმ/სთ. თუ სიჩქარე ფეხით სიარულისას არის V, $V_{\text{საშ.}}=\dfrac{26}{\frac{1}{2}+\frac{6}{V}}=\dfrac{52V}{V+12}$.

14. 2^{4k}-ს ბოლო ციფრია 6, ე.ი. $(2^{4k}-1)$-ს ბოლო ციფრი 5-ია.

15. 5000 კუპიურით შედგენილი თანხის ციფრთა ჯამი იქნება 5000. ამ რიცხვის სამზე გაყოფის ნაშთი 2-ია, ხოლო მილიონის – 1. ე.ი. არ შეიძლება.

16. $10^n+10^{n-5}+10^3$ ციფრთა ჯამია 3. რაც არ იყოფა 9-ზე. მარჯვენა მხარე 9-ის ჯერადია, ე.ი. განტოლებას მთელი ამონახსნი არ აქვს.

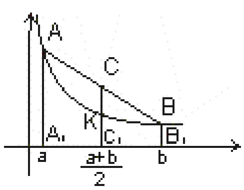
17. $f(x)=-3(x-2)^2-4$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა –4, როცა x=2. $g(x)=2(x+a)^2-4$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა –4, როცა x=–a (a ნებისმიერია). ე.ი. ამ ფუნქციათა უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები ნებისმიერისთვის ერთმანეთს ემთხვევა.

18. 

m+n=c $m+n\geq 2\sqrt{mn}=12$. უმცირესია, როცა m+n=12 ანუ სამკუთხედი ტოლფერდაა.

19. AD=DC=MN=4 $S_{ABC}=2S_{ABD}=9\cdot 4\cdot\sin 60^\circ=18\sqrt{3}$.

20. $\Delta BQR \sim \Delta BCA$ $\dfrac{240}{560}=\dfrac{180}{AB}$. $\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{BR}{AB}$; AB=420მ.

21. 

$$CC_1=\frac{AA_1+BB_1}{2}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{a+b}{2ab}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$$

$KC_1<CC_1$ ე.ი. $\dfrac{2}{a+b}<\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}$.

7. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა

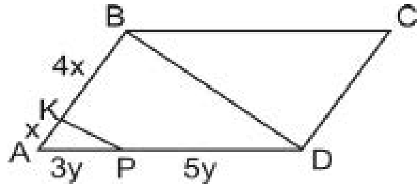
რეზიუმე:

მოსწავლეებს განვუმარტოთ, რომ გარდაქმნების დახმარებით გრაფიკის აგება უმეტეს შემთხვევაში გვიადვილებს შრომას. შეგიძლიათ ჯერ დაავალოთ ააგონ მაგალითად, $y=|x^2-5x+6|$ ფუნქციის გრაფიკი მოდულის განმარტებაზე დაყრდნობით, ახალი მასალის ახსნის შემდეგ კი დავანახოთ, თუ რამდენად მარტივია დავალების შესრულება თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნას.

ამოხსნები, მითითებები:

11. ბ) ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $3x^2-4x+2$ (D<0) იქნება უმცირესი

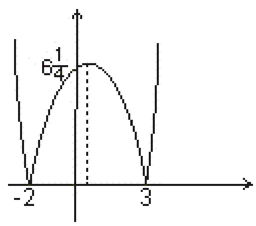
$x_0=\dfrac{2}{3}$; $y_0=\dfrac{2}{3}$; $y_{\min}=\dfrac{2}{3}-3=-\dfrac{7}{3}$.

13. 

$$S_{AKP} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 8} S_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{3}{40} S_{ABCD} = \frac{3}{80} S_{ABCD}$$

15. $P_{ABC} = 2P_{APQ} = 42$.

17. ა) x–3=2 x=5
ბ) x+1=2 x=1

18. 

$a \in (-\infty;0)$ — არც ერთი ამონახსნი;

$a \in (6\frac{1}{4};\infty)$ ან a=0 — ორი ამონახსნი;

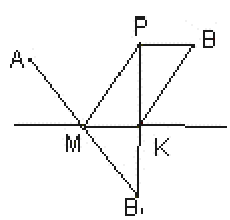
$a = 6\frac{1}{4}$ — სამი ამონახსნი;

$a \in (0;6\frac{1}{4})$ — ოთხი ამონახსნი.

8. უკეთესი ვარიანტის არჩევა

ამოხსნები, მითითებები:

1. დავდოთ ორი კატლეტი, 5 წთ-ში ერთი გადავაბრუნოთ, მეორე გადმოვიღოთ და ტაფაზე დავდოთ მესამე. 5 წთ-ში პირველი კატლეტი შეიწვება და დავდოთ მეორე. სულ დაგვჭირდება 15 წთ.

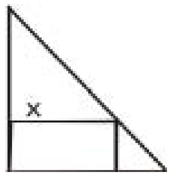
2. 

AMKB ტეხილის სიგრძეა AM+MK+KB. რადგან MK მუდმივია, უმცირესი უნდა იყოს AM+KB. b წრფის პარალელურად ავიღოთ BP=a მონაკვეთი. b წრფის მიმართ ავაგოთ P წერტილის სიმეტრიული წერტილი. M წერტილად ავიღოთ b წრფისა და AB_1 მონაკვეთის კვეთის წერტილი.

3. $AA_1 = CC_1$ $\ell = 2\pi \cdot \frac{x}{2} + 2AA_1 = 100$ $AA_1 = 50 - \frac{\pi}{2}x$.

$$S = \frac{\pi}{4}x^2 + x(50 - \frac{\pi}{2}x) = -\frac{\pi}{4}x^2 + 50x. \qquad x_0 = \frac{100}{\pi}.$$

4. ვთქვათ უნდა გაიაფდეს 0,1x ლარით, მაშინ 1 დეტალის ღირებულება იქნება (10–0,1x) ლარი. ამ შემთხვევაში გაიყიდება (1000+20x) დეტალი. ე.ი. სულ შემოსავალი თანხა იქნება (1000+20x)(10–0,1x), ე.ი. უნდა ვიპოვოთ x-ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც y=(1000+20x)(10–0,1x). ფუნქცია მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას. $y=-2x^2+100x-10000$, საიდანაც x=25, ე.ი. ა) დეტალი უნდა გაიაფდეს 2,5 ლარით; ბ) ფირმა გაყიდდა 1000+20·25=1500 დეტალს.

5. 

I. $S = x(30-2x) = -2x^2 + 30x$. $x_0 = \frac{-30}{-4} = 7,5$ მართკუთხედის ზომები იქნება 7,5; 15;II. $S = \frac{225}{2}$.

II. $S = x(15\sqrt{2} - x)$, საიდანაც $x_0 = \frac{15}{\sqrt{2}}$ $S = \frac{225}{2}$.

ორივე შემთხვევაში ფართობი ერთი და იგივეა.

7. ABO მართკუთხა სამკუთხედში OK=R სიმაღლეა. AK≡x; BK=8–x; მივიღეთ $R^2=x(8-x)$. $S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}(8x - x^2)$ უდიდესი იქნება, როცა x=4 და R=4.

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები

8. f(x) — ლუწი; g(x) — კენტი.

ა) y(x)=f(x+g(x)) y(–x)=f(–x–g(x))=f(x+g(x)) ლუწია.

ბ) y(x)=g(f(x) g(–x)=g(f(–x)=g(f(x)) ლუწი.

გ) y(x)=xf(x)+g(x) y(–x)=–xf(–x)+g(–x)=–xf(x)–g(x)=–(xf(x)+g(x)) კენტი.

დ) y(x)=x(f(x)+g(x)) არც ლუწია, არც კენტი.

9. ა) y=ax+b თუ a=0 ლუწია, თუ b=0 კენტი.

ბ) $y=ax^2+c$ თუ b=0 ლუწია, კენტი არასდროს არ იქნება.

10. $f(x)+x^2$ კენტია, ე.ი.

$f(-3)+(-3)^2=-(f(3)+3^2)$

f(–3)+9=–2–9, საიდანაც f(–3)=–20.

11. (x+1)f(x) ლუწია, ე.ი.

(–x+1)f(–x)=(x+1)f(x)

5·f(–x)=–3·9 f(–x)=$-\frac{27}{5}$.

12. ა) $x_2>x_1$

y=f(x) და y=φ(x) ზრდადია.

განვიხილოთ $(f(x_2)+\varphi(x_2))-(f(x_1)+\varphi(x_1))=(f(x_2)-f(x_1)+\varphi(x_2)-\varphi(x_1))>0$;

ბ) ანალოგიურია;

გ) არ არის ჭეშმარიტი, მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ ორი ზრდადი წრფივ ფუნქციათა ნამრავლი.

13. [–1;2).

14. ა) უდიდესი 2, უმცირესი არ არსებობს;

ბ) ცნობილია, რომ $1+x^2 \geq 2x$; $\frac{2x}{1+x^2}$ ფუნქცია კენტია, ე.ი. უმცირესი მნიშვნელობა ტოლი იქნება –1-ის.

გ) $2+x-x^2 \geq 0$ (განსაზღვრის არე)

$x^2-x-2 \leq 0$ ე.ი. $x \in [-1;2]$.

უმცირესი y(–1)=y(2)=0, უდიდესი წვეროზე y(0,5)=1,5.

დ) უმცირესი $y(\sqrt{1,5}) = y(-\sqrt{1,5}) = \sqrt{2,5}$. უდიდესი არ არსებობს.

15. ა) უდიდესი $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$, უმცირესი y(3)=–4;

ბ) [0;2] შუალედში ფუნქცია კლებადია, ე.ი. უდიდესი y(0)=$\frac{11}{3}$, უმცირესი y(2)=3.

გ) $y = \frac{3-3x}{2-3x} = 1 + \frac{1}{2-3x}$ [1;4] შუალედში ფუნქცია ზრდადია, ე.ი. უდიდესი y(4)=$\frac{9}{10}$; უმცირესი y(1)=0.

16. a>0; c>0; b>0.

17. ნახაზიდან $x_1=1$, $x_2=6$ და $c= x_1x_2=6$.

19. $y=-2x^2+5x-1$ $x \in [0;3]$ $x_0 = \frac{5}{4}$**;** $\frac{5}{4} \in [0;3]$ ე.ი. $y_{\max}(\frac{5}{4}) = 2\frac{1}{8}$; $y_{\min}(3) = -4$.

21. ა) $y = x(x+25) = x^2 + 25x$

$x_{წვ}$=–12,5.

ბ) $y=3x(x+1)=3x^2+3x$ x_0=–1,5.

შეამოწმე შენი ცოდნა

1. ბ; 2. დ; 3. ბ; 4. ა; 5. ა; 6. დ; 7. ა; 8. ბ; 9. ბ; 10. ა.

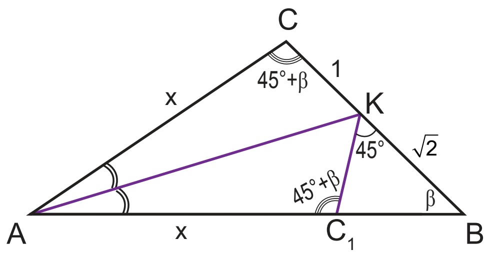
II თავი

1. გეომეტრიული გარდაქმნები

რეზიუმე:

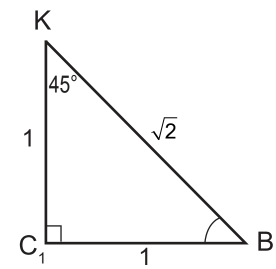
გავახსენოთ მოსწავლეებს, რას ნიშნავს სიბტრყის გარდაქმნა, რომელი გარდაქმნა ინარჩუნებს ორ წერტილის შორის მანძილს და რომელი არა. როგორ ფიგურებში გადადის ფიგურა აღნიშნული გარდაქმნებით.

ამოხსნები, მითითებები:

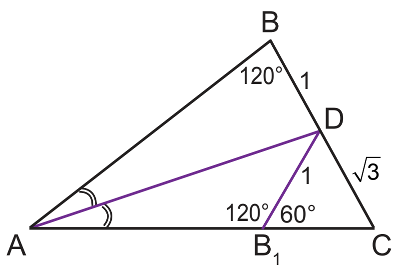


2. $\angle B=\beta \Rightarrow \angle C=45°+\beta$

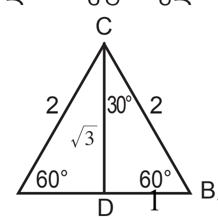
ავაგოთ C წერტილის სიმეტრიული C_1 წერტილი AK წრფის მიმართ. $ACKC_1$ ოთხკუთხედში AK სიმეტრიის ღერძია, ე.ი. $\angle C=\angle C_1=45+\beta$. $CK=C_1K=1$, ხოლო $AC=AC_1$. ΔC_1KB-სთვის $\angle KC_1A$ გარე კუთხეა, საიდანაც $45+\beta=\beta+\angle C_1KB \Rightarrow \angle C_1KB=45°$.

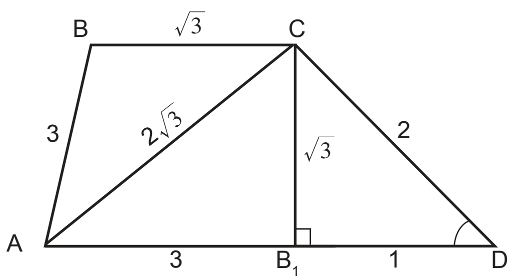


მივიღეთ ΔC_1KB, სადაც ვიცით 2 გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე. რიცხვითი მონაცემებიდან ჩანს, რომ ეს არის მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედი კათეტით 1, ე.ი. $C_1B=1$. $\beta=45° \Rightarrow \angle C=90°$.
მაშასადამე ΔACB ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია, ე.ი. $AC=CB=\sqrt{2}+1$.



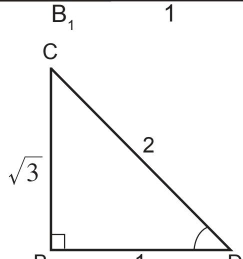
3. ავაგოთ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი AD წრფის მიმართ. მივიღეთ ΔB_1DC, რომელიც ტოლგვერდა სამკუთხედის ნახევარია (გვერდით 2), საიდანაც $\angle C=30°$. $\Delta ABC \Rightarrow \angle BAC=180°-120°=30°$. ე.ი. ΔABC ტოლფერდაა (ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია), ე.ი. $AB=BC=\sqrt{3}+1$. $B_1C=AB_1+B_1C=AB+2=3+\sqrt{3}$ $(AB=AB_1)$.

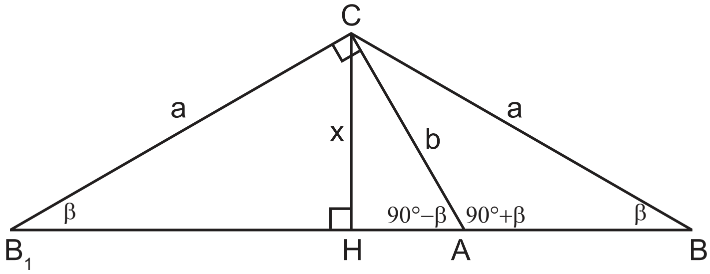




4. ავაგოთ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი AC წრფის მიმართ. $CB_1=BC=\sqrt{3}$. ხოლო $AB=AB_1=3$. $B_1D=4-3=1$.

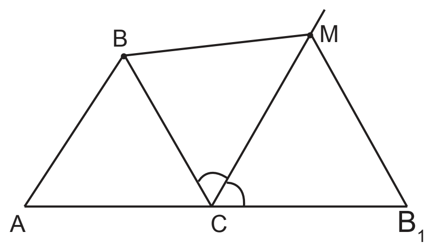
მივიღეთ ΔB_1CD, სადაც ვიცით 3 გვერდი. რიცხვითი მონაცემებიდან ჩანს, რომ სამკუთხედი მართკუთხაა $(2^2=\sqrt{3}^2+1^2)$. მისი კუთხით B_1. ამასთან $B_1D=\frac{1}{2}$. $CD \Rightarrow \angle c=30°$. $\Delta AB_1C \Rightarrow (\angle B_1=90°) \Rightarrow AC=2\sqrt{3} \Rightarrow \angle CAB_1=30° \Rightarrow \angle BAD=60°$.



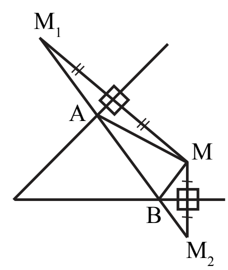


5. ავაგოთ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი CH წრფის მიმართ. ცხადია, $BC=BC_1=a$. $\angle B=\angle B_1\equiv\beta$. პირობის თანახმად, $\angle CAB=90^\circ+\beta$. საიდანაც მისი მოსაზღვრე კუთხე

$$\left.\begin{array}{l}\angle CAB_1=180^\circ-(90^\circ+\beta)=90^\circ-\beta\\ \text{განვ. } \triangle ACB_1 \qquad \angle B_1=\beta\end{array}\right)\Rightarrow\angle B_1CA=90^\circ\Rightarrow AB_1CH=AC\cdot CB_1\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\cdot x=ab\Rightarrow\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



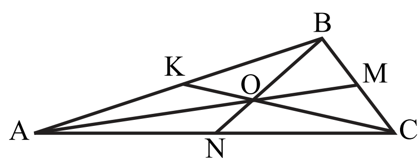
6. ავაგოთ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი CM წრფის მიმართ. ცხადია, $BC=B_1C$ და $BM=B_1M$ (1).
განვ. ΔAMB_1. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, $AB_1<AM+MB_1 \Rightarrow AC+CB_1<AM+MB_1$, საიდანაც (1)-ის გათვალისწინებით $AC+BC<AM+BM$, რ.დ.გ.

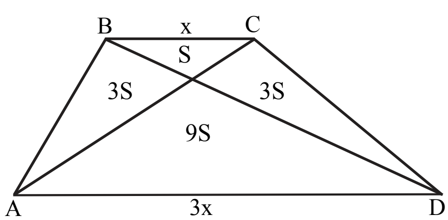


7. აგება: ავაგოთ M წერტილის სიმეტრიული M_1 და M_2 წერტილები კუთხის გვერდების მიმართ. M_1 და M_2 წერტილები შევაერთოთ. M_1M_2 წრფის კუთხის გვერდებთან გადაკვეთის წერტილები იქნება საძიებელი A და B წერტილი.
დამტკიცება: ნებისმიერი MAB_k სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია M_1ABM_2 ტეხილის სიგრძის. ეს უკანასკნელი კი უმცირესია მაშინ, როცა M_1, A, B და M_2 წერტილები ერთ წრფეზეა განლაგებული.

8. $\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{BC}=\frac{15}{5}=\frac{3}{1}$, ე.ი. $AN=12$.

$\frac{BO}{ON}=\frac{AB}{AN}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$.





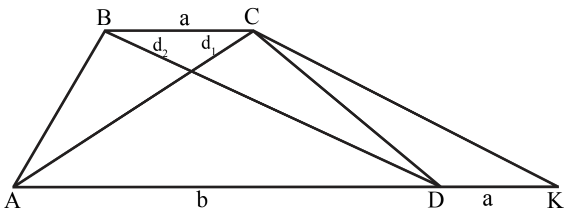
9. ე.ი. $16S=128$
$S=8$.
$S_{BOC}=8$; $S_{AOB}=S_{COD}=24$.
$S_{AOD}=72$.

10. $S=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 14\cdot\sin\alpha=63\sin\alpha$. $\sin\alpha$-ს უდიდესი მნიშვნელობა 1, ე.ი. სამკუთხედი მართკუთხაა და მისი ფართობი 63-ის ტოლია.

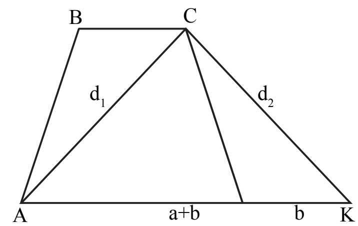
11. ცხადია, I წინადადება ყოველთვის ჭეშმარიტია. II წინადადების ჭეშმარიტებისთვის უნდა დავამატოთ, რომ a და b-ს c-ზე გაყოფის ნაშთების ჯამი c-ს ჯერადია.

2. პარალელური გადატანა

ამოხსნები, მითითებები:

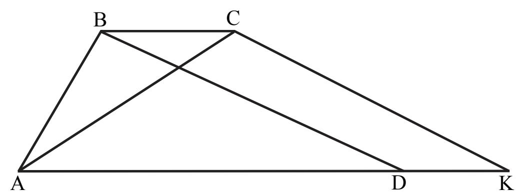


1. გადავიტანოთ BD დიაგონალი BC ვექტორით. ცხადია, BCKD ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ე.ი. BC=DK და BD=CK.

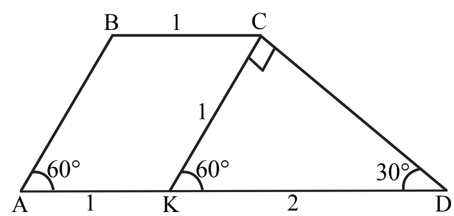


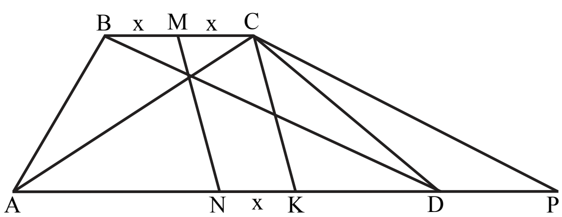
ავაგოთ ΔACK სამი გვერდით. C წერტილზე გავატაროთ AK-ს პარალელური წრფე. მასზე გადავზომოთ CB=a ტოლი მონაკვეთი. A და B წერტილები შევაერთოთ.

2. ავაგოთ ACK სამკუთხედი ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით ($AC=d_1$; $CK=d_2$ და $\angle c=\alpha$). AK მონაკვეთის ნებისმიერ D წერტილზე გავავლოთ CK-ს პარალელური წრფე. ამ წრფეების კვეთის წერტილი იქნება საძიებელი B წერტილი. რადგან D წერტილი შეგვეძლო ნებისმიერად აგვერჩია, ეს ნიშნავს, რომ ამ ამოცანას აქვს უამრავი ამონახსნი.

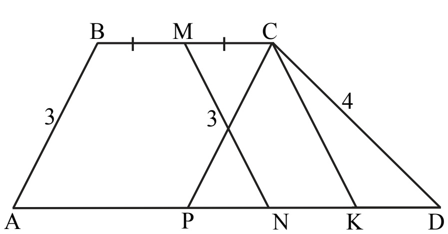


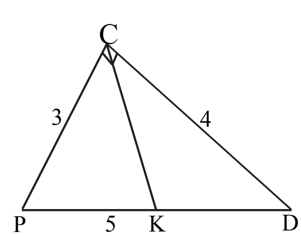
3. გადავიტანოთ AB ფერდი BC ვექტორზე ABCK პარალელოგრამი. ე.ი. $\angle CKD=60° \Rightarrow \angle KCD=90° \Rightarrow CK=AB=1$ $\Delta KCD \Rightarrow CD=\sqrt{3}$.





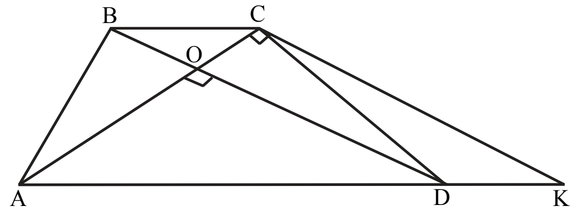
4. M და N ფუძეების შუაწერტილში გადავიტანოთ BD და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორზე MN კი $\overrightarrow{MC}$ ვექტორზე. მოსთხოვეთ მოსწავლეებს, რომ თავად დაასაბუთონ CK წარმოადგენს ΔACP-ს მედიანას. ეს არის ფაქტი, რომელიც დასჭირდებათ მსგავსი ამოცანების ამოხსნისას. იქვე განუმარტეთ, რომ ამ შემთხვევაში ეს გადატანა შედეგს არ მოგვცემს, რადგან ვერ შევძელით მოცემულობის თავმოყრა ერთ სამკუთხედში და მხოლოდ ამის მერე შესთავაზეთ ამოხსნა. გადავიტანოთ AB გვერდი $\overrightarrow{BC}$ ვექტორზე MN კი $\overrightarrow{MC}$ ვექტორზე სთხოვეთ აჩვენონ, რომ CK არის ΔPCD-ს მედიანა. ამოვხაზოთ ΔPCD.

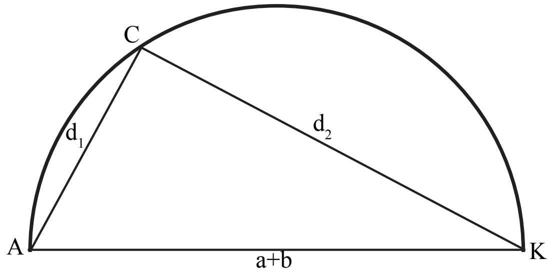




მივიღეთ პითაგორას სამკუთხედი (გვერდებია 3, 4, 5), ე.ი. $\angle C=90°$. $MN=CK=\frac{1}{2}P=2,5$.

5. გადავიტანოთ BD დიაგონალი $\overrightarrow{BC}$ ვექ-ტორში. მივიღეთ BCKD პარალელოგრამი $\Rightarrow$ $BD=CK$. $BC=DK$. $\angle AOD=\angle ACK=90°$. ე.ი. ΔACK მართკუთხაა. თუ შემოვხაზავთ წრეს AK დია-



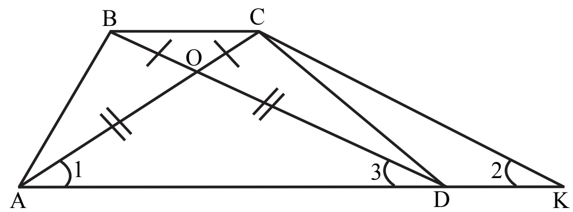


მეტრით, ყველა შესაძლო C წერტილი იქნება ამ წერტილზე. ე.ი. h-ის მაქსიმუმია $R=\frac{a+b}{2}$.
პასუხი: $0<h\leq\frac{a+b}{2}$.

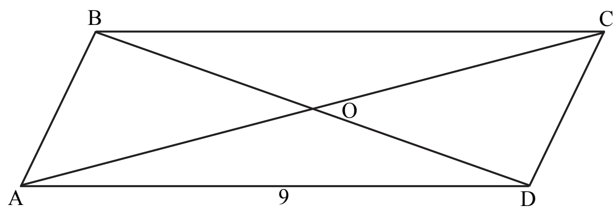
6. გადავიტანოთ BD დიაგონალი $\overrightarrow{BC}$ ვექტორზე. $\Rightarrow CK=BD$, მაგრამ $AC=BD \Rightarrow AC=CK \Rightarrow \angle1=\angle2$. ამასთან, $\angle1=\angle3$ ($BD\|CK$, AK მკვეთია), საიდანაც $\angle3=\angle2$. $\Rightarrow$

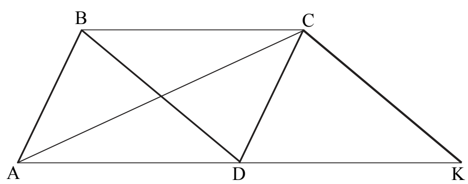
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AO = OD \\ \text{მაგრამ } AC = BD \end{matrix}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} BO = OC \\ \angle4 = \angle5 \\ AO = OD \end{matrix}\right) \Rightarrow \Delta ABO=\Delta COD$$

$\Rightarrow AB=CD$, რ.დ.გ.



7. ვიპოვოთ AOD სამკუთხედის ფართობი ჰერონით და გავამრავლოთ 4-ზე.
$S=40\sqrt{2}$.





შეიძლება ასეც: $CK\|BD$ $S_{ACK}=S_{ABCD}$. ვიპოვოთ ჰერონის ფორმულით S_{ACK}.

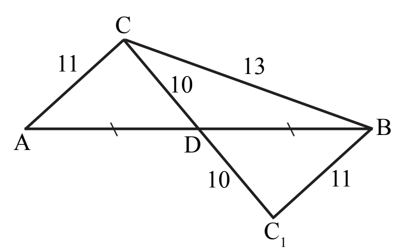
8. რომბის გვერდი ტოლია $a\sqrt{2}$. ე.ი. $S=a^2\sqrt{2}$.

9. ა) I; II; ბ) ნებისმიერში.

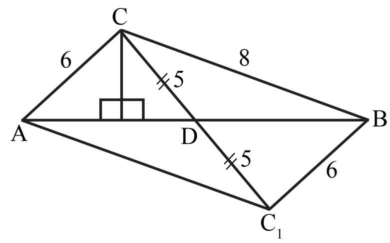
10. ცხადია, ამ შემთხვევაში $a>0$ და $D\leq0$. ჭეშმარიტი შეიძლება იყოს გ).

3. ცენტრული სიმეტრია

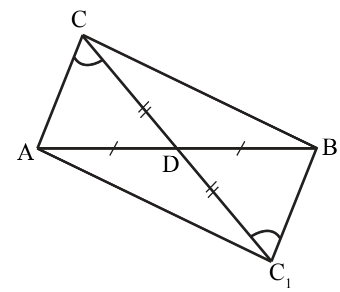
1. ავაგოთ C წერტილის სიმეტრიული C_1 წერტილი D ცენტრის მიმართ. ამავე ცენტრის მიმართ A-ს სიმეტრიულია B წერ-ტილი. მაშასადამე, $ACBC_1$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. $DC_1=10$, $C_1B=11$. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CC1B}=\sqrt{22\cdot2\cdot9\cdot11}=66$.
პასუხი: $S=66$სმ^2.



2. ავაგოთ C წერტილის სიმეტრიული C_1 წერტილი D ცენტრის მიმართ. ცხადია, $C_1B=6$; $DC_1=5$. მივიღეთ ΔCC_1B_1. გვერდები 6, 8 და 10. მაშასადამე, ეს სამკუთხედი მართკუთხაა $\angle CBC_1=90°$. საიდანაც დავასკვნით, ეომ $ACBC_1$ მართკუთხაა, ე.ი. $\angle C=90°$ და $AB=10$. მართკუთხა $\Delta ACB \Rightarrow h\cdot AB=AC\cdot CB \Rightarrow 10h=6\cdot 8 \Rightarrow h=4{,}8$. პასუხი: $h=4{,}8$.



3. ავაგოთ C წერტილის სიმეტრიული C_1 წერტილი D ცენტრის მიმართ. $ACBC_1$ პარალელოგრამია, ე.ი.



$$\left.\begin{array}{r} AC = C_1B, \text{ პირობის თანახმად,} \\ AC < BC \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1B < BC \\ \text{განვ. } \Delta\, CC_1B \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle \widehat{C_1CB} < \widehat{CC_1B} \\ \angle CC_1B = \angle ACD \end{array}\right) \Rightarrow \angle \widehat{ACD} > \angle \widehat{BCD}$$

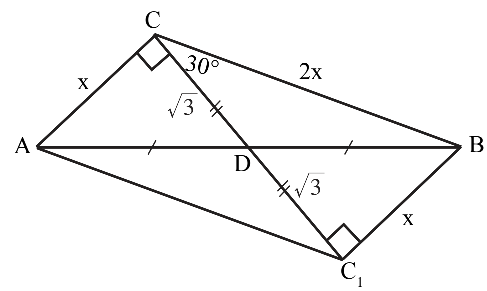
პასუხი: $\angle \widehat{ACD} > \angle \widehat{BCD}$.

4. ავაგოთ C წერტილის სიმეტრიული C_1 წერტილი D ცენტრის მიმართ. $ACBC_1$ პარალელოგრამია

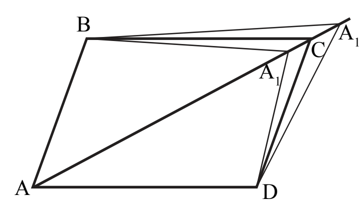
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle CC_1B = 90° \\ \text{განვ. } \Delta\, CC_1B \\ \angle CC_1B = 30° \end{array}\right) \Rightarrow C_1B \equiv x, \text{ მაშინ } CB=2x \Rightarrow$$

$4x^2=x^2+(2\sqrt{3}\,)^2 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x=2$. ე.ი. $C_1B=2$; $CB=4$.

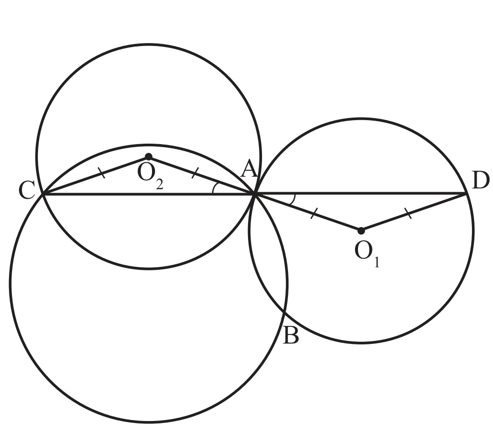
პასუხი: AC=2 და CB=4.



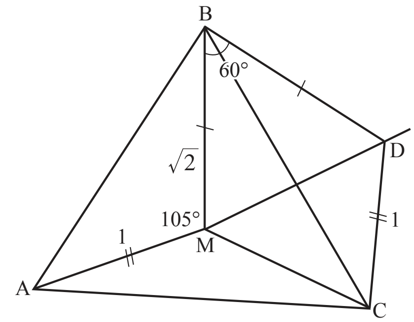
5. ცხადია, B და D წერტილები სიმეტრიულია O ცენტრის მიმართ. თუ A და C წერტილებიც აღმოჩნდება სიმეტრიული O ცენტრის მიმართ, მაშინ ABCD იქნება პარალელოგრამი. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ A და C წერტილები არ არის სიმეტრიული O ცენტრის მიმართ, მაშინ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი O-ს მიმართ შეიძლება იყოს A_1 წერტილი, რომელიც მდებარეობს OC სხივზე და არ ემთხვევა C წერტილს. ABA_1D პარალელოგრამი უნდა იყოს. ე.ი. $\angle A=\angle A_1$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $\angle A=\angle C$. მაშასადამე, ABCD პარალელოგრამია.



6. ავაგოთ A ცენტრის მიმართ მცირე წრეწირის სიმეტრიული წრეწირი. ამისთვის ავიღოთ O_1წერტილის სიმეტრიული O_2 წერტილი A ცენტრის მიმართ და გავატაროთ წრეწირი, რომელიც გადის A წერტილზე და რომლის ცენტრია O_2. ვთქვათ ამ უკანასკნელმა დიდი წრეწირი გადაკვეთა C წერტილში. გავავლოთ CA წრფე ორივე წრეწირთან გადაკვეთამდე. ცხადია, $\Delta CO_2A=\Delta DO_2A$. ტოლფერდა სამკუთხედები ტოლია გვერდით და ფუძესთან მდევარე კუთხით $\Rightarrow CA=AD$.

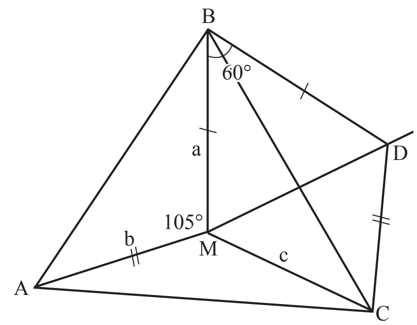


4. მობრუნება

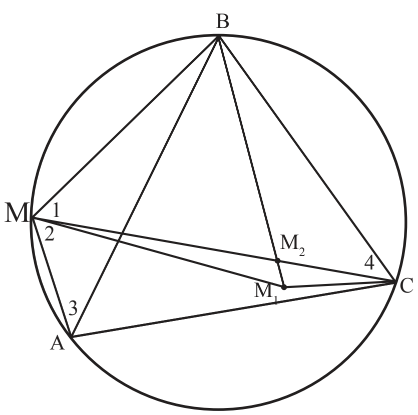


1. მოვაბრუნოთ ABM სამკუთხედი B წერტილის მიმართ 60°-იანი კუთხით. BA გადავა BC-ში, BM კი —BD-ში. მივიღეთ $BM=MD=BD=\sqrt{2}$. $DC=AM=1$ და $\angle BDC=105° \Rightarrow \angle MDC=45°$. მივიღეთ ΔMCD, სადაც $\angle MDC=45°$. $MD=\sqrt{2}$ და $CD=1$. ამ მონაცემებიდან ჩანს, რომ $\angle MCD=90°$, ე.ი. $MC=1$ და $\angle BMC=105°$.

პასუხი: $MC=1$ და $\angle BMC=105°$.

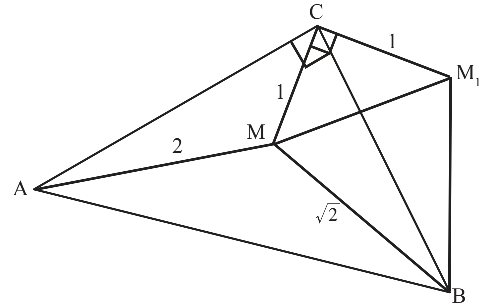


2. მოვაბრუნოთ ΔBMA B წერტილის გარშემო 60˚-იანი კუთხით. $MA\equiv b$; $BM\equiv a$; $MC\equiv c$. ΔMDC-ს გვერდებია a, b და c (იხ. ამოცანა 1). დასამტკიცებელი, ცხადია, სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, რ.დ.გ.



3. მოვაბრუნოთ ΔBMA B წერტილის მიმართ 60˚-იანი კუთხით. ცხადია, A წერტილი მივა C წერტილში. M წერტილი კი რომელიღაც M_1 წერტილში. BM_1-ს კვეთა MC-თან$\equiv M_2$-ით. ცხადია, ΔMBM_1-ში $BM=BM_1$, $\angle MBM_1=60°$, ე.ი. ΔMBM_1 ტოლგვერდაა, საიდანაც $\angle BMM_1=60°$. მაგრამ $\angle BMM_2=60°$ (ეყრდნობა BC მცირე რკალს). ე.ი. M_1 წერტილი ემთხვევა M_2 წერტილს. ამის შემდეგ ადვილი საჩვენებელია, რომ $\Delta MAB=\Delta BM_2C$ ($BM=BM_2$, $\angle 3=\angle 4$; $\angle BMA=\angle BM_2A=120°$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} MA = M_2C \\ MB = MM_2 \end{matrix}\right) \Rightarrow MC=MB+MA, \text{ რ.დ.გ.}$$



4. მოვაბრუნოთ AMC სამკუთხედი C ცენტრის მიმართ 90°-იანი კუთხით. ცხადია, A წერტილი გადავა B წერტილ-ში. M კი რომელიღაც M_1 წერტილში. ამასთან $CM_1=CM=1$, $\angle MCM_1=90°$, სადაც $MM_1=\sqrt{2}$.

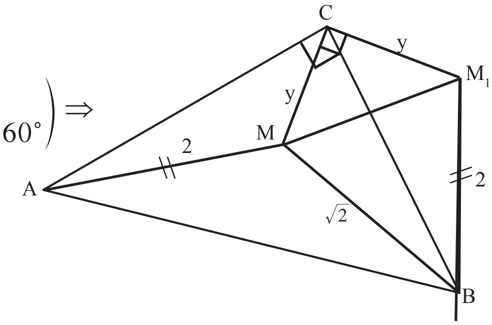
$$\left.\begin{matrix} \text{განვ. } \Delta\, MM_1B \\ MM_1 = MB = \sqrt{2} \\ M_1B = MA = 2 \end{matrix}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \angle M_1MB = 90° \\ \angle CMM_1 = 45° \end{matrix}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \angle CMB = 135° \\ \text{განვ. } \Delta\, CMB \end{matrix}\right) \Rightarrow CB^2=$$

$=1+2-2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos 135°=3+2=5 \Rightarrow CB=2\sqrt{5}$.

$$\left.\begin{matrix} \text{განვ. } \Delta\, AMC;\ AC = CB = \sqrt{5} \\ AM = 2; \quad CM = 1 \end{matrix}\right) \Rightarrow AC^2=AM^2+CM^2 \Rightarrow \angle AMC=90°.$$

პასუხი: $\angle CMB=115°$; $\angle AMC=90°$; $AC=\sqrt{5}$;

5. მოვაბრუნოთ ΔAMC C ცენტრის მიმართ 90°-იანი კუთხით. ცხადია, $CM=CM_1=y$, $AM=BM_1=2$.

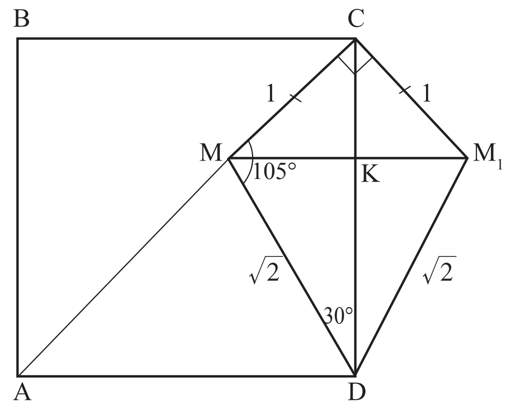


$$\text{განვ. } \left.\begin{array}{l}\Delta MM_1C \\ \angle C = 90^\circ\end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} MM_1 = y\sqrt{2} \\ \angle CM_1M = 45^\circ \\ \angle CMB = 135^\circ \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle M_1MB = 90^\circ \\ \angle MM_1B = 135^\circ - 45^\circ = 60^\circ \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\sqrt{2} = \frac{M_1B}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad MB^2+1=4 \Rightarrow MB=\sqrt{3}.$$

პასუხი: $MB=\sqrt{3}$ და $CM=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. მოვაბრუნოთ CM ცენტრით C, 90°-იანი კუთხით. ცხადია, $\angle MCM_1=90°$, ე.ი. $MM_1=\sqrt{2}$, ხოლო $\angle M_1MD=105°–45°=60° \Rightarrow \Delta MM_1D$ ტოლგვერდაა, ე.ი. $M_1D=\sqrt{2}$, ე.ი. CD არის MM_1 მონაკვეთის შუამართობი. ე.ი. $\angle MDC=30°$. და $\angle MDA=60°$.



$$AD = CD = CK+KD = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

$\Delta ABC \Rightarrow AC=CD\sqrt{2}=\sqrt{3}+1$.

პასუხი: $AC=\sqrt{3}+1$; $\angle MDC=30°$.

7. ა) $y^3–x^3=7$

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} y - x = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 1\end{cases} & \varnothing \\ \begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7\end{cases} & (-2;-1)\ (1;2) \\ \begin{cases} y - x = -7 \\ x^2 + xy + y^2 = -1\end{cases} & \varnothing \\ \begin{cases} y - x = -1 \\ x^2 + xy + y^2 = -7\end{cases} & \varnothing \end{array}\right.$$

ბ) $xy+3x–5y=–2$

$x(y+3)–5y–15+15=–2$

$x(y+3)–5(y+3)=–17$

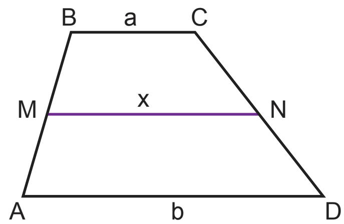
$(y+3)(x–5)=–17$.

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} y + 3 = 1 \\ x - 5 = -17\end{cases} & (-12;-2) \\ \begin{cases} y + 3 = -1 \\ x - 5 = 17\end{cases} & (22;-4) \\ \begin{cases} y + 3 = 17 \\ x - 5 = -1\end{cases} & (4;14) \\ \begin{cases} y + 3 = -17 \\ x - 5 = 1\end{cases} & (6;-20) \end{array}\right.$$

5. მსგავსების გარდაქმნა. ჰომოთეტია

1. $MBCN \sim AMNB \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$

პასუხი: $MN=\sqrt{ab}$.



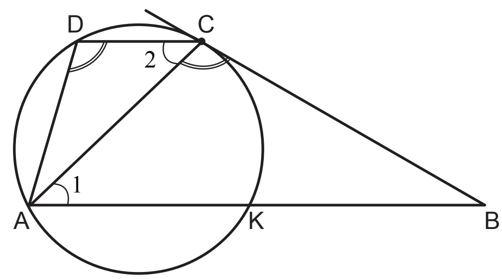
2. $\angle 1=\angle 2$. $\angle ADC=\frac{AKC}{2}$ (ჩახაზული კუთხე).

$\angle ACB=\frac{AKC}{2}$ (მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე).

ე.ი. $\angle ADC=\angle ACB$. მივიღეთ $\Delta ABC \sim \Delta CAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow AC^2=ab \Rightarrow AC=\sqrt{ab}$.

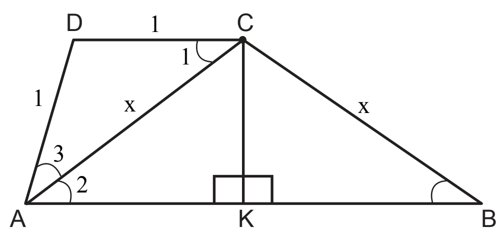
პასუხი: $\sqrt{ab}=AC$.



3. გავავლოთ AC დიაგონალი. ცხადია, $\angle 1=\angle 2$. ΔADC ტოლფერდაა, ე.ი. $\angle 1=\angle 3$. $\Rightarrow \angle 2=\angle 3$. $\Rightarrow \angle B=\angle\beta$. პირობის თანახმად, $\angle DAC=2\beta \Rightarrow \angle 1=\angle 2=\angle 3=\beta$. მაშასადამე, ΔACB-ც ტოლფერდაა $AC=CB=x$. ამასთან, $\Delta ADC \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

$\Delta CKB \Rightarrow \beta=\frac{3}{2}:\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta=60°$.

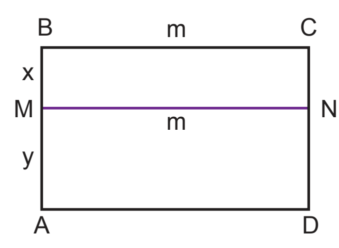
პასუხი: $\angle ABC=60°$; $AC=\sqrt{3}$.



4. I. $\frac{x}{m} = \frac{y}{m} \Rightarrow x=y$ (ეწინააღმდეგება პირობას).

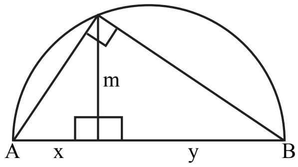
I. $\frac{x}{m} = \frac{m}{y} \Rightarrow m^2=xy$.

ამოცანა დავიდა შემდეგზე:



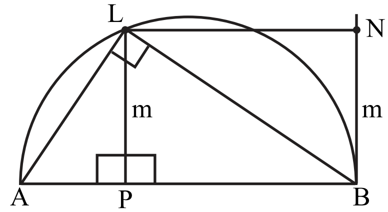
A B m

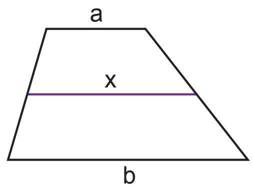
AB მონაკვეთი გავყოთ ისეთ ორ x და y სიგრძის მინაკვეთად, რომ $xy=m^2$. ეს უკვე ცნობილი ამოცანაა.



საორიენტაციო ნახაზი

აგება:
AB დიამეტრით შემოვხაზოთ ნახევარწრეწირი. B წერტილიდან აღვმართოთ წრფე. გადავზომოთ მასზე m მონაკვეთის ტოლი მონაკვეთი BN. N წერტილზე გავატაროთ AB-ს პარალელური წრფე. ამ წრფის წრეწირთან გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილიდან დავუშვათ მართობი AB-ზე. ამგვარად, მიღებული $\angle ALB$ მართკუთხაა. მაშასადამე, $m^2=AP\cdot PB$. $AP=x$ და $PB=y$.

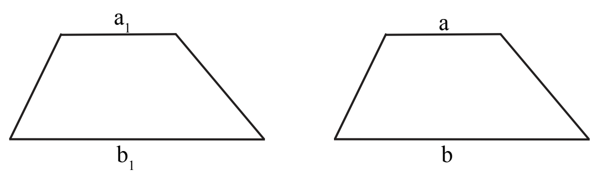




5. $\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \Rightarrow x^2=ab$. იხილეთ ამოცანა 4.

6. თუ ორ რომბს აქვს ტოლი კუთხე, მაშინ ეს რომბები მსგავსია.

7. თუ ტრაპეციებს აქვს ტოლი კუთხეები (ფუძეებით a, b და a_1, b_1) და $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, მაშინ ეს ტრაპეციები მსგავსია.



8. თუ მართკუთხედების გვერდები (a; b და a_1; b_1) პროპორციულია $\left(\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}\right)$, მაშინ ეს მართკუთხედები მსგავსია.

11. ჭეშმარიტია გ.

6. სტერეომეტრიის აქსიომები

რეზიუმე: გავახსენოთ მოსწავლეებს აქსიომისა და თეორემის ცნება, პლანიმეტრიის აქსიომები.

ამოხსნები, მითითებები:

1. მყარად იატაკზე შეიძლება არ იდგეს მხოლოდ ოთხფეხა სკამი, იმ შემთხვევაში თუ მისი ფეხების ბოლოები ერთ სიბრტყეზე არ ხვდება.

2. თუ ეს სამი წერტილი ერთ წრფეზეა მოთავსებული, ცხადია, სამივე წერტილი ერთ სიბრტყეში მოხვდება. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ეს წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. მაშინ მათზე, აქსიომა 2-ის თანახმად, გაივლება ერთადერთი სიბრტყე, რომელშიც აქსიომა 3-ის ძალით მოხვდება სამივე წრფე, რომელიც წყვილწყვილად აგებულ ამ წერტილებზე გადის.

3. ამოცანაში მთავარია მოსწავლეებს გავააზრებინოთ ის, რომ ბუზების სიჩქარეები ამოცანისთვის ზედმეტი პირობაა. აქსიომა 2-ის თანახმად სამივე ბუზი დროის ნებისმიერ მომენტში იქნება ერთ სიბრტყეში.

5. ცხადია, ABC და ABD სიბრტყეები იკვეთება AB წრფეზე.

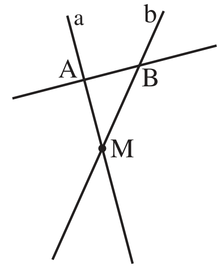
7. ორი სიბრტყის ყველა საერთო წერტილი მათი გადაკვეთის წრფეზე მდაბერობს.

8. დავუშვათ საწინააღმდეგო: AC და BD წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. მაშინ, ცხადია, წერტილები A, B, C და D ამ სიბრტყეშია მოთავსებული. აქსიომა 3-ის ძალით AB და CD წრფეებიც ამავე სიბრტყეში იქნება, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

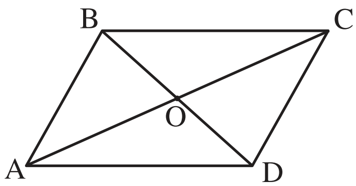
11. გავაგრძელოთ მედიანა მისი ტოლი მონაკვეთით და მიღებული წერტილი შევაერთოთ სამკუთხედის რომელიმე წვეროსთან. მიღებული სამკუთხედი და მოცემული სამკუთხედი ტოლდიდია. ვიპოვოთ ფართობი ჰერონის ფორმულით $S=270$სმ^2.

7. აქსიომების შედეგები

ამოხსნები, მითითებები:

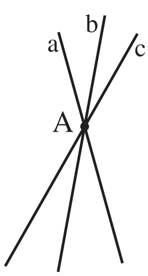


1. ა) არ შეიძლება. წრფეზე და მასზე არამდებარე წერტილზე ყოველთვის გაივლება სიბრტყე. ე.ი. ოთხივე წერტილი ერთ სიბრტყეში მოხვდება.
ბ) არ შეიძლება. ორ გადამკვეთ წრფეზე გაივლება სიბრტყე.



2. a და b წრფეებზე გაივლება (a;b) სიბრტყე.
n წრფე კვეთს a წრფეს A წერტილში, b წრფეს B წერტილში. აქსიომა 3-ის თანახმად, n წრფეც (a;b) სიბრტყეში მოთავსდება. M წერტილზე გამავალი ყველა წრფე ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს.

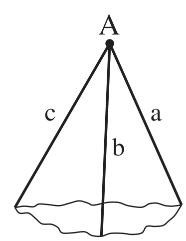
3. ვთქვათ A, O და D წერტილები ეკუთვნის α სიბრტყეს, მაშინ ცხადია, AO წრფეც და მასთან C წერტილი და DO წრფე და მასთან B წერტილიც ამავე სიბრტყეში აღმოჩნდება.



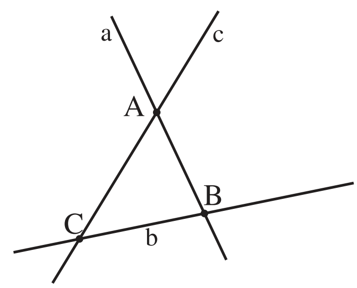
4. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

ა) სამივე წრფე ერთ სიბრტყეში მდებარეობს - (a;b) სიბრტყეში მოხვდება c წრფეც.

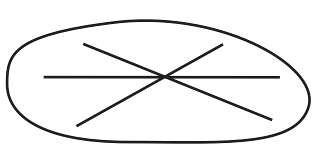
ბ) c წრფე არ ხვდება (a;b) სიბრტყეში, მაშინ ვღებულობთ სამ სიბრტყეს: (a;b); (a;c); (b;c).



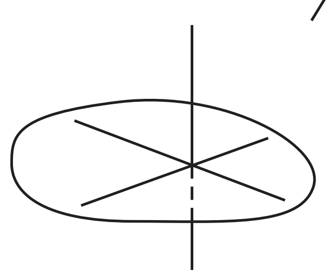
5. დავუშვათ, სამი წრფე ერთ წერტილში არ იკვეთება. აღვნიშნოთ მათი კვეთის წერტილები A, B და C-თი. აქსიომა 3-ის თანახმად, BC წრფე მოხვდება AC და AB წრფეებზე გამავალ სიბრტყეზე. ე.ი. თუ სამი წრფე ერთ წერტილში არ იკვეთება, ისინი ერთ სიბრტყეში მოთავსდება. ერთ წერტილში გამავალი სამი წრფე შეიძლება ერთ სიბრტყეში მოთავსდეს (ნახ. ა), ან ერთ-ერთი წრფე კვეთდეს დანარჩენ ორზე გავლებულ სიბრტყეს (ნახ. ბ.).



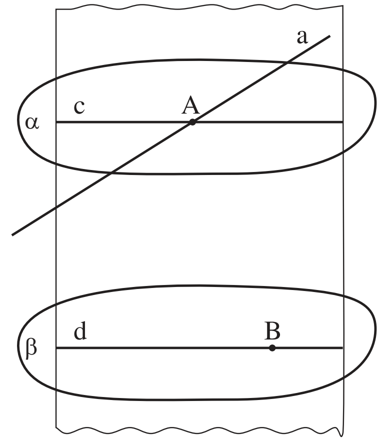
ა)



ბ)



6. a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში. უ.დ., რომ a წრფე კვეთს β სიბრტყეს. დავუშვათ საწინააღმდეგო: a წრფე β სიბრტყეს არ კვეთს. ავიღოთ β სიბრტყეზე რაიმე B წერტილი და გავავლოთ (B;a) სიბრტყე, რომელიც ცხადია, კვეთს α სიბრტყეს, რომელიც c წრფეზე, რომელიც A წერტილზე გადის და აგრეთვე კვეთს β სიბრტყეს B წერტილზე გამავალ რომელიღაც d წრფეზე. მივიღეთ (B;a) სიბრტყეში d წრფის პარალელურ ორ (a და c) წრფეს, რომლებიც ერთ, A წერტილზე გადის, რაც შეუძლებელია. რ.დ.გ.



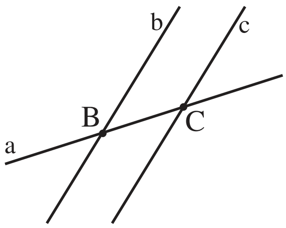
8. წრფეთა პარალელურობა

რეზიუმე:

მოსწავლეებმა იციან სიბრტყეზე პარალელურ წრფეთა განმარტება. მათ უნდა დაინახონ, რომ ორი წრფის არგადაკვეთა სივრცეში ყოველთვის არ ნიშნავს წრფეთა პარალელობას; განასხვავონ ერთმანეთისგან პარალელური და აცდენილი წრფეები.

ამოხსნები, მითითებები:

1. აქსიომა 3-ის ძალით ნებისმიერი წრფე, რომელიც ორ პარალელურ წრფეს გადაკვეთს ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.



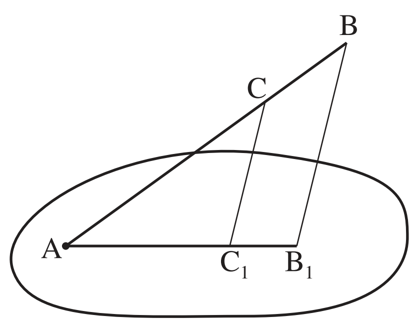
2. იხ. ამოცანა 1.

3. არსებითია იმის ჩვენება, რომ A, C_1 და B_1 წერტილები ერთ წრფეზე განთავსდება (სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე).

დ) AC=a; BC=b; CC_1=c

უ.ვ. BB_1 $\quad \Delta ACC_1 \sim ABB_1$

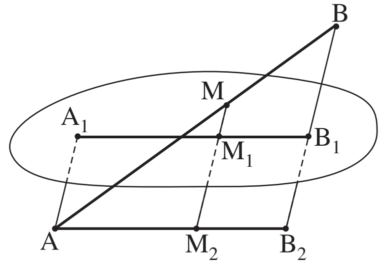
$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1}$, საიდანაც $BB_1 = \frac{c(a+b)}{a}$.



4. დ) $MM_1 = \frac{a+b}{2}$.

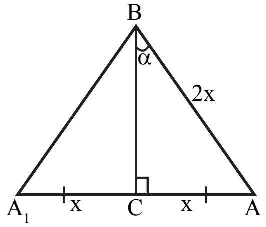
5. დ) AA_1=a, BB_1=a. ჩავთვალოთ, რომ b>a. გავაგრძელოთ BB_1 A_1B_1-ის პარალელურ AB_2-ს გადაკვეთამდე. ΔABB_2-ში MM_2 შუახაზია. BB_2=a+b, ე.ი., $MM_1=\frac{a+b}{2}$, მაგრამ $M_1M_2=AA_1=B_1B_2$=a.

მივიღეთ: $MM_1=MM_2-M_1M_2=\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$.

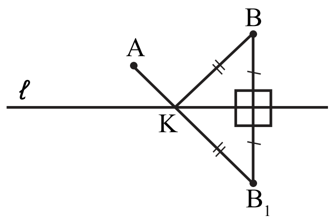


10. ცხადია, b=0, ე.ი. $k = -\frac{8}{5}$.

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები

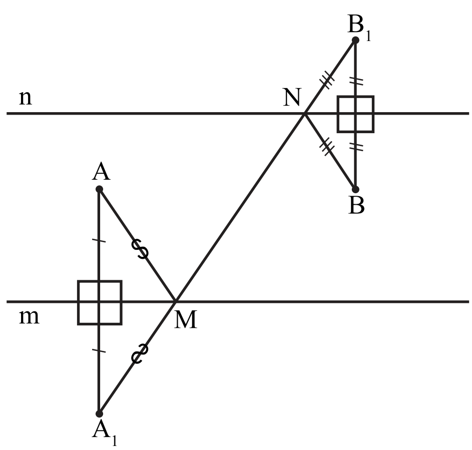


1. მოც. $AC=\frac{AB}{2}$. ავაგოთ A წერტილის სიმეტრიული A_1 წერტილი BC წრფის მიმართ. ΔABA_1 ტოლგვერდაა. BC ბისექტრისაა, ე.ი. $\alpha=30°$.

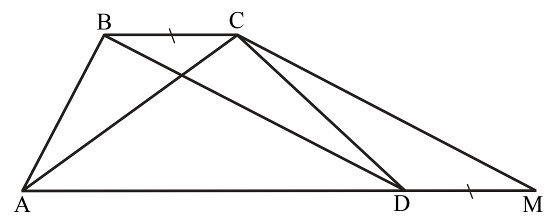


2. ავაგოთ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი l წრფის მიმართ. A და B_1 შევაერთოთ. ცხადია $BK=KB_1$ (ΔBKB_1 ტოლფერდაა), ე.ი. AKB ტეხილის სიგრძე ტოლია AKB_1 ტეხილის სიგრძის (ნებისმიერი $k\in l$-ისთვის). ეს უკანასკნელი კი უმცირესია, რაც A_1K და B_1 ერთ წრფეზე მდებარეობს.

3. (იხილეთ ნახაზი)



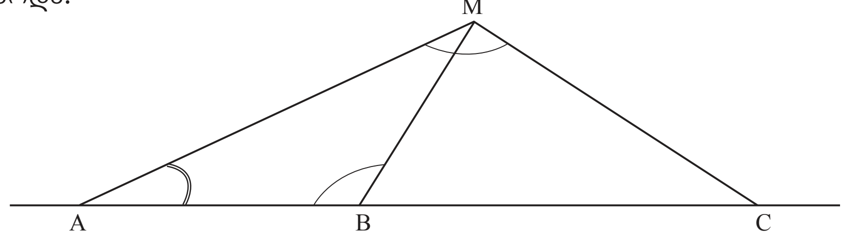
4. გადავიტანოთ BD დიაგონალი BC ვექტორზე (BCMD პარალელოგრამია). $S_{ABCD}=S_{\Delta ACM}$.



5. იხილეთ ამოცანა 4.

6. იხილეთ ამოცანა 4.

7. $\Delta ABM \sim \Delta AMC$. $\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{AC}$ $AM^2=AB\cdot AC \Rightarrow AM=\sqrt{AB\cdot AC}$. ე.ი. ასეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილია წრეწირი ცენტრით A და რადიუსით $R=\sqrt{AB\cdot AC}$, AB წრფესთან გადაკვეთის წერტილების გარდა.



8. მითითება: ΔBCC_1 და ΔHAC_1 მსგავსია.

9. მითითება: ΔMAC და ΔMCB მსგავსია.

III თავი

1. პარამეტრების შემცველი განტოლება

რეზიუმე:

იცოდეს პარამეტრის ცნება; უნდა ასხვავებდეს ერთმანეთისგან უცნობ ცვლადსა და პარამეტრს; ესმოდეს პარამეტრის შემცველი ამოცანის აზრი.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $x=\frac{2a}{3}$; ბ) $x=\frac{7+4a}{5}$; გ) თუ a=0, x ნებისმიერია, თუ $a\neq0$ x=1;

დ) თუ b=1 $x\in\varnothing$, თუ $b\neq1$, $x=\frac{2}{b-1}$; ე) x(3–b)=3, თუ $b\neq3$, $x=\frac{3}{3-b}$, თუ b=3 $x\in\varnothing$.

ვ) ax–a+5=3x (a–3)x=a–5. თუ $a\neq3$ $x=\frac{a-5}{a-3}$. თუ a=3, $x\in\varnothing$.

ზ) (a+2)x=(a–2)(a+2);

თუ $a\neq-2$ x=a–2; თუ a=–2 $x\in R$.

თ) (b–3)(b+2)x=b+2.

თუ $b\neq3$ და $b\neq-2$; $x=\frac{1}{b-3}$.

თუ b=3 $x\in\varnothing$. თუ b=–2 $x\in R$.

ი) $a^2x-a=ax+2$

a(a–1)x=a+2.

თუ $a\neq0$ და $a\neq1$ $x=\frac{a+2}{a(a-1)}$;

თუ a=0 ან a=1 $x\in\varnothing$;

კ) $x^2+bx+b-1=0$

$D=b^2-4b+4=(b-2)^2$

$$x=\frac{-b\pm(b-2)}{2}=\left[\begin{array}{l}-1\\-b-1\end{array}\right.$$

ლ) $x^2+4x-a=0$

$$\frac{D}{4}=4+a$$

თუ $a<-4$ $x\in\varnothing$.

თუ a=–4 x=–2.

თუ $a>-4$ $x=-2\pm\sqrt{4+a}$.

მ) $ax^2+2x+5=0$

$$\frac{D}{4}=1-5a.$$

თუ a=0 $x=-\frac{5}{2}$.

თუ $a>\frac{1}{5}$ x∈∅.

თუ $a=\frac{1}{5}$ x=–5.

თუ $a<\frac{1}{5}$ და a≠0 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-5a}}{a}$.

3. ა) $(k-3)(k+5)x=k-3$.

1. k=–5; 2. k=3; 3. k≠3; k≠5.

გ) (1+k)x=k²+5k.

1. k=–1; 2. k∈∅; 3. k≠1.

6. $\frac{5x+5a}{5-x}=0$.

$\begin{cases} x=-a \\ x\neq 5 \end{cases}$ თუ a=–5 განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

9. $(a-2)(a-3)x=(a+5)(a-3)$.

ა) a≠2;3; ბ) a=3; გ) a=2.

13. $x^2+px+q=0$. $x_1=3$; $x_2=-4$.

$x^4+px^2+q=0$ განტოლებისთვის $x^2\neq-4$, ე.ი. $x^2=3$ $x=\pm\sqrt{3}$.

${x_1}^2+{x_2}^2=6$.

14. $ax^2+bx+c=0$ $x_1=2$; $x_2=-3$.

$a\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2+b\left(\frac{2x}{x+1}\right)+c=0$ $\left[\begin{array}{ll} \frac{2x}{x+1}=2 & x\in\varnothing \\ \frac{2x}{x+1}=-3 & x=-\frac{3}{5} \end{array}\right.$

2. მოდულის შემცველი განტოლებისა და უტოლობის ამოხსნა

რეზიუმე:

გავახსენოთ მოსწავლეებს რიცხვის მოდულის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. |a|=5 ნიშნავს, რომ a-ს შესაბამისი წერტილის კოორდინატი სათავიდან დაშორებულია 5 ერთეულით, ანუ a=5 ან a=–5 . მაშასადამე |a|>5 ნიშნავს, რომ ის წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობას დაშორებულია კოორდინატთა სათავიდან 5-ზე მეტი ერთეულით.

ამოხსნები, მითითებები:

2. ა) $\sqrt{x^2-6x+9}$=2x–3 ⇒ |x–3|=2x–3 ⇒ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 3 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right.$ ⇒ x=2.

ბ) $\sqrt{(2x-3)^2}=|x-2| \Rightarrow |2x-3|=|x-2|=\left[\begin{array}{l}2x-3=x-2\\ 2x-3=2-x\end{array}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{5}{3}\end{array}\right.$

გ) $x=7;\ -\frac{1}{3}$.

დ) $x^2-4x+4=2|x-2| \Rightarrow (x-2)^2-2|x-2|=0 \Rightarrow |x-2|(|x-2|-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2\,|=0\\ |x-2\,|=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\\ x=0\end{array}\right.$.

3. ა) $x\neq 0$; ბ) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$; გ) $x=0$; დ) $\varnothing$.

9. $S_{OBAC}=S_{NCA}-S_{NOB}=\frac{1}{2}NC\cdot h_{NC}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{3}{2}h_{NC}-2$. ვიპოვოთ A წერტილის კოორდინატები. MN წრფის განტოლებაა: $y=-x+2$; AM წრფის განტოლებაა: $y=-\frac{1}{2}x-1$; $A(6;-4)$, ე.ი. $h_{NC}=6$. $S_{OBAC}=7$.

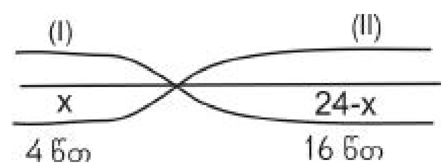
10. $\frac{2}{a+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$. გამარტივებით ვღებულობთ $2b^2=a^2+c^2$.

11. $100!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot99\cdot100$ დავითვალოთ ამ ნამრავლში რამდენი 5-იანია. 1 — 100-მდე 5-ის ჯერადია — 20. 25-ის ჯერადი — 4. ე.ი. სულ 24 5-იანი, ე.ი. ნამრავლი დაბოლოვდება 24 ნულით.

3. მაღალი ხარისხის განტოლების ამოხსნა

რეზიუმე: განვუმარტოთ მოსწავლეებს, რომ მაღალი ხარისხის განტოლება რომ ამოვხსნათ ან უნდა შევარჩიოთ ხელსაყრელი აღნიშვნა, ან მარჯვენა მხარეს უნდა დავტოვოთ ნული, ხოლო მარცხენა მხარე უნდა დავშალოთ მამრავლებად, ან კიდევ ზეპირად დავინახოთ ფესვები და დავამტკიცოთ, რომ მოცემულ განტოლებას მეტი ამონახსენი არა აქვს. განვმარტოთ ბიკვადრატული განტოლება; სასურველია განვიხილოთ ყველა შემთხვევა — როდის და რამდენი ამონახსნი აქვს ბიკვადრატულ განტოლებას.

ამოხსნები, მითითებები:



2. $V_1=\frac{24-x}{\frac{16}{60}}=\frac{15(24-x)}{4}$

$V_2=\frac{x}{\frac{4}{60}}=15x$

შეხვედრამდე: $\frac{x}{\frac{15(24-x)}{4}}=\frac{24-x}{15x}$. $4x^2=(24-x)^2$.

$2x=24-x$

$x=8$

$V_1=60$კმ/სთ. $V_2=120$კმ/სთ.

6. ა) $x^2-x=y$ $\quad \frac{y}{y+2}-\frac{y+2}{y-2}=1$;

ბ) $x^2+2x+2\equiv y$ $\quad \frac{y-1}{y}+\frac{y}{y+1}=\frac{7}{6}$;

გ) $\frac{x^2+1}{x}\equiv y$ $\quad y-\frac{1}{y}=-2{,}5$;

დ) $\frac{x^2-3x+6}{x}\equiv y$ $\quad y+\frac{8}{y}=6$;

ე) $x^2-x+2\equiv y$ $\quad (y-1)(y+1)=3$;

ვ) $(x^2+x-6)(x^2+x-2)=-4$;

$x^2+x-4\equiv y$ $\ (y-2)(y+2)\equiv -4$;

ზ) $(x^2-6x)^2-2(x^2-6x+9)=81$;

$x^2-6x\equiv y$.

თ) $(x^2-5x+7)^2-2(x^2-5x+6)=1$.

$x^2-5x+7\equiv y$ $\ y^2-2(y-1)=1\cdot$

7. ა) $(x+\frac{1}{x})^2=9$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$, საიდანაც $x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

ბ) $9x^2+\frac{4}{x^2}=(3x+\frac{2}{x})^2-12=25-12=13\cdot$

8. ა) $2(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})-6=0$ $\qquad x+\frac{1}{x}=y$

$2y^2+y-10=0$ $\qquad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$y_1=-\frac{5}{2},\ y_2=2$, საიდანაც $x=1; -\frac{1}{2}; -2$.

9. ა) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=17\cdot 19=323$;

ბ) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=360\cdot$ $\quad x^2+5x+5\equiv y$.

$(y-1)(y+1)=360\cdot$

$y^2=361$ $\qquad y=\pm 19$

$x_1=-7$ $\qquad x_2=2$

13. ა) $(x+5)(x-7)(x+1)(x-a)=0$

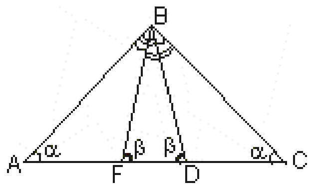
$x_1=-5\ \ x_2=7\ \ x_3=-1\ \ x_4=a$

ზუსტად სამი ამონახსნი იქნება, როცა a რომელიმე სხვა ფესვს ემთხვევა ე.ი. $a=-5;7;-1$.

ბ) $(ax^2+5x+1)(x^2-x-2)=0$;

$(ax^2+5x+1)(x+1)(x-2)=0$.

ორი ფესვი უკვე გვაქვს $x_1=-1$; $x_2=2$. ზუსტად სამი ამონახსენი გვექნება, როცა:
1) ax^2+5x+1 სამწევრის $D=0$;
2) $D>0$ და ერთ-ერთი ფესვია -1 ან 2.
3) $a=0$. ე.ი. $a=\frac{25}{4};4;-\frac{11}{4};0$.

14. 

$$\begin{cases}2\beta+\alpha=180^\circ\\ \beta=2\alpha\end{cases} \qquad \alpha=36^\circ$$

ე.ი. 36°; 36°; 108°.

4. ირაციონალური განტოლება

რეზიუმე:

განვმარტოთ ირაციონალური განტოლება. მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ ირაციონალური განტოლების ამოხსნის პროცესში არის გარეშე ფესვის გაჩენის „საშიშროება". მას უნდა შეეძლოს გარეშე ფესვის დადგენა და განტოლების ფესვების დაწერა (ფესვების შემოწმება).

ამოხსნები, მითითებები:

3. ე) $(2x-1)\sqrt{x-2}=0$

$x=\frac{1}{2}$ განსაზღვრის არეში არ შედის, ე.ი. $x=2$.

ვ) $(x-1)\sqrt{x^2-4}=0$ $\qquad x\pm2$.

მ) უკეთესია ფესვის აღნიშვნა
$\sqrt{x^2-3x+5}\equiv y\geq0$
$y^2+y-12=0$, საიდანაც $y=3$; $x=-1;4$.

6. ცხადია, 11 დისკი თითოეული 11 ლარად (121-ს სხვა გამყოფები გარდა 1-სა და 121-სა არ აქვს).

8. ა) $|3-5x|=2$ $\quad x=1$ $\quad x=\frac{1}{5}$; $\qquad$ ბ) $x=-3$ $y=4$;

გ) $x=-\frac{3}{2}$ და $y+4x-1=0$ ე.ი. $y=7$.

დ) $x\pm1$ $y\pm4$ განტოლებას აქვს ამონახსნთა ოთხი წყვილი $(\pm1;\pm4)$ $\quad(\pm1;\mp4)$.

9. 

AB=2; BC=7; AC=8.

ΔABC-ში $AD:DC=2:7$

$AD=2x$; $DC=7x$, საიდანაც $9x=8$; $x=\frac{8}{9}$.

ΔABD-ში AO ბისექტრისაა, $AB:AD=BO:OD \Rightarrow BO:OD=2:2x=1:\frac{8}{9}=9:8$.

5. უტოლობა

რეზიუმე:

გავახსენოთ მოსწავლეებს რიცხვითი უტოლობა, მისი თვისებები, ცვლადიანი უტოლობა, მისი ამოხსნის ეტაპები. წრფივი, კვარდატული უტოლობები.

ამოხსნები, მითითებები:

5. ამოხსენით სისტემა:

ა) $\begin{cases} 7x-3<5x+20 \\ 7x-3>2x+12 \end{cases}$ $\begin{cases} x<\dfrac{23}{2} \\ x>3 \end{cases}$

6. ა) $(x+5)(x-2)\geq 0$ $\quad x\in(-\infty;-5]\cup[2;\infty)$.

7. ა) $\begin{cases} x\neq 1;2 \\ x>5 \end{cases}$ $(5;\infty)$; ბ) $\begin{cases} (x-2)^2\geq 0 \\ 8-x\geq 0 \end{cases}$. $(-\infty;8]$

8. ა) $5x^2-10xy+25y^2+7=5x^2-10xy+5y^2+20y^2+7=5(x^2-2xy+y^2)+20y^2+7=5(x-y)^2+20y^2+7>0$;

ბ) $x^2+xy+y^2=x^2+xy+\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{4}y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$;

გ) $\dfrac{(1+b)^2-2b}{2}=\dfrac{1+b^2}{2}>0$;

დ) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)=\frac{1}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)\geq 0$.

9. ა) $mx^2-9mx+5m+1>0$
თუ $m=0$ და $m>0$ $D<0$
$m<\dfrac{4}{61}$

ბ) $\begin{cases} a>0 \\ 4a+1<0 \end{cases}$ $a\in\varnothing$.

6. პარამეტრის შემცველი უტოლობები

რეზიუმე:

მოსწავლეები უკვე არაერთხელ შეხვდნენ პარამეტრის ცნებას განტოლებების, განტოლებათა სისტემების ამოხსნის, ფუნქციათა გამოკვლევების დროს; კვადრატული ფუნქციის ნიშანმუდმივობის არეების დადგენის დროსაც, ფაქტობრივად, ხსნიან პარამეტრულ კვადრატულ უტოლობებს. განვიხილოთ წრფივი პარამეტრული უტოლობა და შევეცადოთ მსჯელობა ძირითადად მოსწავლეებმა ჩაატარონ ჩვენს მიერ დასმული კითხვების დახმარებით.

ამოხსნები, მითითებები:

1. გ) $2ax+2a>3x-4x-4a$
$(2a+1)>-6a$

თუ $a>-\dfrac{1}{2}$ $\quad x>-\dfrac{6a}{2a+1}$

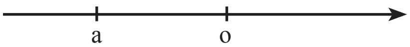
თუ $a<-\dfrac{1}{2}$ $\quad x<-\dfrac{6a}{2a+1}$

თუ $a=-\dfrac{1}{2}$ $\quad x\in\varnothing$.

ე) $x(x-a)<0$ a შევადაროთ 0-ს

თუ $a>0$ 

$a \in (0;a)$

თუ $a<0$ 

$a \in (a;0)$

თუ $a=0$ $a \in \varnothing$.

2. $3ax+2(a+x)>2-3a(x+1)$ ჩავსვათ $x_0=1$.
მივიღებთ $a>0$.

3. ა) $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 4-a \end{cases}$ ა) $5<4-a$; $a<-1$; ბ) $a=-1$; გ) $a>-1$.

4. ა) $\begin{cases} x > 3 \\ x \geq a \end{cases}$ 1. $(3;\infty)$ ინტერვალი იქნება, თუ $a \leq 3$. 2. $[5;\infty)$, თუ $a=5$.

5. ა) $\begin{cases} ax < 1 \\ x > 4a \end{cases}$ ცხადია, სისტემას ამონახსნი რომ არ ქონდეს, $a>0$ და პირველ უტოლობას ქონდეს $x < \frac{1}{a}$ სახე, სადაც $\frac{1}{a} < 4a$.

$\begin{cases} \frac{1}{a} < 4a \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4a^2 > 1 \\ a > 0 \end{cases}$ $a > \frac{1}{2}$.

6. ა) $a=2$ $(x-2)^2 \leq 0$ $x=2$; ბ) $(ax+2)(3x-6) \geq 0$ $a=-1$; $x=2$.

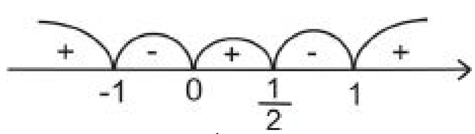
7. უტოლობის ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით

რეზიუმე:

სასურველია, მოსწავლეებს წინა დღეს დავავალოთ, რომ ამოხსნან მაგ. $(x-1)(x+5)(x-7)(x+2)>0$ უტოლობა და დათვალონ, თუ რამდენი სისტემის ამოხსნა დასჭირდათ იმისთვის, რომ შეესრულებინათ დავალება. მერე განუმარტოთ ინტერვალთა მეთოდის უპირატესობა.

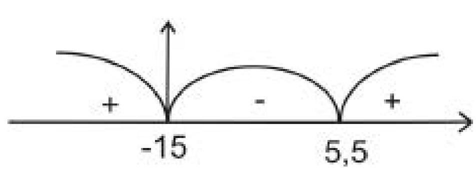
ამოხსნები, მითითებები:

2. დ) $(2x-4x^2)(x^4-1) \geq 0$
$2x(2x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1) \leq 0$



$x \in [-1;0] \cup [\frac{1}{2};1]$

3. დ) $\frac{(2x-11)(x^2+18)}{(x+15)(2x^2-3x+2)} \leq 0$

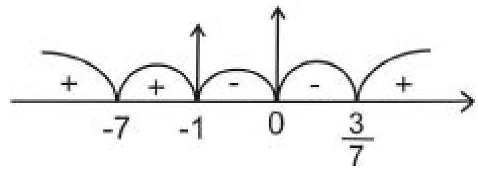


$x^2+18>>0$

$2x^2-3x+2>>0$

ე.ი. $x \in (-15;5,5]$

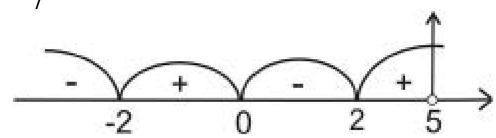
4. ა) $\dfrac{(x+7)^2(3x-7x^2)}{x^3(x+1)} \geq 0$



$\dfrac{(x+7)^2 x(7x-3)}{x^3(x+1)} \leq 0$

$x \in (-1;0) \cup (0;\frac{3}{7}] \cup \{-7\}$

5. გ) $\sqrt{x(x^2-4)} + \dfrac{1}{x-5}$ $\begin{cases} x(x-2)(x+2) \geq 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$

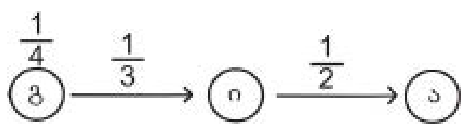


$D(y) = [-2;0] \cup [2;5) \cup (5;\infty)$

6. შევადგინოთ განტოლება საშუალოს ფორმულის გამოყენებით $\dfrac{20 \cdot 5 + x \cdot 0}{20+x} = 2$, საიდანაც x=30.

9. $ax^2-4ax+5-a=0$ $\quad a \neq 0$.

$\dfrac{D}{4} = 4a^2 - a(5-a) = 5a^2 - 5a$ $\quad 5a(a-1) > 0 \quad a \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$.

10. 

$\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{24}$.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. ბ) $4-5x=|5x-4|$

$4-5x \geq 0 \qquad x \leq \dfrac{4}{5}$

ზ) $|x^2-5x|=0 \qquad x=0;\ x=5$.

თ) $|x^2-2x|=-5 \qquad x \in \varnothing$.

2. ე) $(|x|-5)(|x|-7) \leq 0$

$\begin{cases} |x| \leq 7 \\ |x| \geq 5 \end{cases} \qquad x \in [-7;-5] \cup [5;7]$

3. ა) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+4} \neq 0 \quad x \in R \setminus \{2;3;-2\}$;

ბ) $x^2+4x-5 \neq 0 \qquad x \in R \setminus \{-5;1\}$.

4. დ) $(|x|-4)(x^2-2x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} |x| = 4 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = 3; x = -1 \end{array}$ ოთხი.

6. ა) $a>5$; $\quad$ ბ) $a > -\dfrac{5}{2}$; $\quad$ გ) $a \in (-\infty;-1) \cup (5;\infty)$; $\quad$ დ) $a \in R$.

9. ა) $\left[\begin{array}{l} c > 0 \\ D < 0 \end{array}\right.$ (თუ ფესვები გააჩნია x^2-ის მიმართ, ისინი უარყოფითია). მივიღებთ: $C>0$;

ბ) $D<0$, ე.ი. $C>4$.

10. ა) ოთხი ამონახსნი გვაქვს, თუ $D>0$ და $a>0$.

ე.ი. $\begin{cases} a > 0 \\ 169 - 4a > 0 \end{cases} \qquad 0 < a < \dfrac{169}{4}$.

ბ) ორი ამონახსნი, როცა $D=0$ ან $D>0$ და $a<0$ (ფესვები x^2-ის მიმართ სხვადასხვანიშნიანია).

ე.ი. $a = \dfrac{169}{4}$ ან $a<0$.

11. ა) $(9-x^2)\sqrt{1-x}=0 \quad x=-3;1$.

ე) $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35 \qquad \sqrt{x^2+13}\equiv y$

$y^2-2y-35=0$

$y=-5 \quad y=7$.

$\sqrt{x^2+13}\neq-5$. ე.ი. $\sqrt{x^2+13}=7$, საიდანაც $x=\pm6$.

ვ) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2(x+1) \quad x=-1$ განსაზღვრის არეში არ შედის $\sqrt{x^2+x-2}=2$, საიდანაც $x=-3;2$.

თ) $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15) \quad x=-2$ განტოლებას აკმაყოფილებს

მივიღეთ $\sqrt{16x+33}=8x-15$

$16x+33=(8x-15)^2$, საიდანაც $x=1$ და 3, აკმაყოფილებს მხოლოდ 3, ე.ი. პასუხი: $x=-2$; 3.

12. ა) $(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8=0 \quad x^2+2x=y$

$y^2-7y-8=0$

$y=8; -1. \qquad$ I. $x^2+2x=-1 \qquad$ II. $x^2+2x=8$

$\qquad x=-1 \qquad x=-4; 2$.

ზ) $2x^3+3x^2+3x+2=0$

$2(x^3+1)+3x(x+1)=0$

$2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0$

$(x+1)(2x^2+x+2)=0$

$x=-1$;

თ) $10(x^2-2x)^2=18(x^2-2x+2)$

$x^2-2x\equiv y$.

13. $ax^2+4x>1-3a$

$ax^2+4x+3a-1>0$

$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ \left(-1; \frac{4}{3}\right) \end{cases} \qquad a\in\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

14. ჩავსვათ $x=-1$

$-5+3+4+2a=0$

$2a=-2$

$a=-1$.

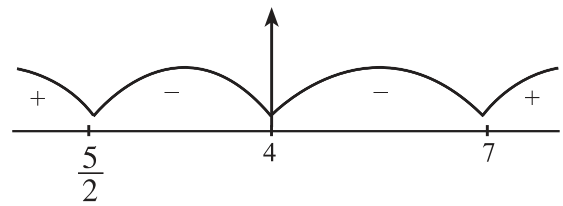
15. ა) $\dfrac{x^2(x-1)+x-1}{x+8} \le 0$

$\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x+8} \le 0 \qquad x\in(-8;1].$

ე) $\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)^2 - 9 \le 0$

$\left(\dfrac{x+2}{x-4}-3\right)\left(\dfrac{x+2}{x-4}+3\right) \le 0$

$\left(\dfrac{(x-7)(2x-5)}{(x-4)^2}\right) \ge 0$



$x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right] \cup [7;\infty)$

17. ა) $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$

$\begin{cases} 9-x^2 \ge 0 \\ x^2-5x-6 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x+3) \le 0 \\ (x-6)(x+1) > 0 \end{cases} \qquad x\in(-3;-2)$

შეამოწმე შენი ცოდნა

1. ბ; 2. გ; 3. ბ; 4. გ; 5. დ; 6. გ; 7. ბ; 8. ბ; 9. ა; 10. დ; 11. ბ; 12. ა; 13. გ; 14. დ; 15. ბ; 16. ბ; 17. ა) $\varnothing$; ბ) 1; 2; გ) $\pm\sqrt{5}$; ± 1; დ) 0; $\pm\sqrt{6}$; 18. გ.

IV თავი

1. კოსინუსების თეორემა

რეზიუმე:

ვთხოვოთ მოსწავლეებს დააფიქსირონ სამუთხედის ორი გვერდი და ცვალონ მათ შორის კუთხე (მართი, ბლაგვი, მახვილი) თითოეულ შემთხვევაში გაზომონ მესამე გვერდის სიგრძე, გამოთქვან ვარაუდი.

ამოხსნები, მითითებები:

5. a=12, b=13.

ა) I სამკუთხედი მართკუთხა $c=\sqrt{144+169}=\sqrt{313}$

II მახვილკუთხა $13<c<\sqrt{313}$.

III ბლაგვკუთხა $\sqrt{313}<c<25$.

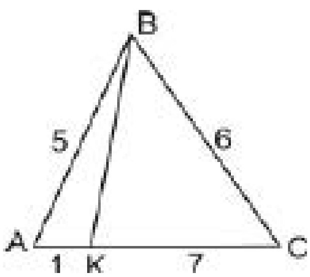
ბ) თუ c უდიდესი არ არის, უდიდესია b=13.

I მართკუთხა $c=\sqrt{169-144}=5\cdot$

II მახვილკუთხაა, როცა $(13^2<c^2+12^2)\Rightarrow 5<c<13\cdot$

III ბლაგვკუთხაა, სადაც $13^2>c^2+12^2$, ე.ი. 1<c<5.

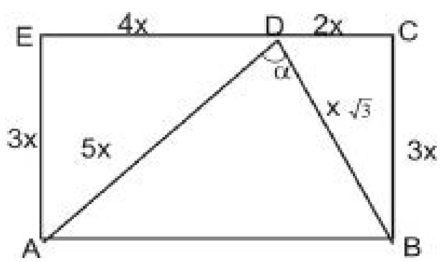
7.



ვიპოვოთ A კუთხის კოსინუსი 36=25+64–80cosα; $\cos\alpha=\dfrac{53}{80}$.

ΔABK-დან $BK=\sqrt{25+1-10\cdot\dfrac{53}{80}}=\sqrt{\dfrac{155}{8}}$.

8.

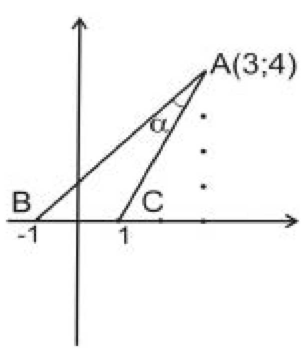


$(6x)^2=(5x)^2+(x\sqrt{13})^2-2\cdot 5x\cdot x\sqrt{13}\cos\alpha\cdot$

$36=25+13-10\sqrt{13}\cos\alpha$.

$10\sqrt{13}\cos\alpha=2\quad \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

9.



$AB=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

$AC=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$4=32+20-2\sqrt{32}\cdot\sqrt{20}\cdot\cos\alpha$, საიდანაც

$\cos\alpha=\dfrac{48}{16\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

2. კოსინუსების თეორემის შედეგები

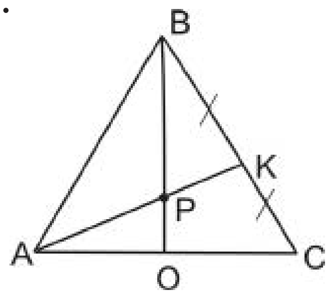
რეზიუმე:

ვთხოვოთ მოსწავლეებს დააფიქსირონ პარალელოგრამის დიაგონალები და ცვალონ მათ შორის კუთხე. თითოეული შემთხვევისათვის გაზომონ მიღებული პარალელოგრამის გვერდები და გამოთვალონ მათი კვადრატების ჯამი. შედეგები შეადარონ, გამოთქვან ვარაუდი.

ამოხსნები, მითითებები:

1. $4x^2+9x^2+2(121+529)$ $x=10$.

3 . $2((x+4)^2+x^2)=144+196$ $x=7$.

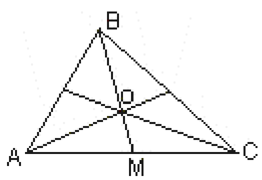


5. ამოცანა შეიძლება გაკეთდეს მედიანის ფორმულით, მაგრამ შეიძლება გაკეთდეს პითაგორას თეორემის გამოყენებით.

$AP=\frac{2}{3}AK=\frac{10}{3}$ ე.ი. $OP=\sqrt{\frac{100}{9}-8}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$BO=2\sqrt{7}$ $BC=\sqrt{28+8}=6\cdot$

10.



$AO=\frac{2}{3}\cdot 15=10$ $CO=15$.

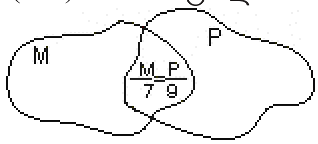
ΔAOC -ში . $OM=\frac{1}{2}\sqrt{200+450-529}=\frac{11}{2}$.

$BM=3OM=16{,}5$.

12. $\frac{5x+3}{(x-5)(x+2)}=\frac{a(x+2)+b(x-5)}{(x+2)(x-5)}$.

$5x+3=(a+b)x+2a-5b$ ტოლობა რომ შესრულდეს ნებისმიერი x-თვის $\begin{cases}a+b=5\\2a-5b=3\end{cases}$, $a=4$ $b=1$.

13.



P — ფილოსოფოსების რაოდენობა
m — მათემატიკოსების რაოდენობა

$\frac{m}{p}=\frac{7}{9}$, ე.ი. მეტია ფილოსოფოსები.

3. სინუსების თეორემა

რეზიუმე:

ვთხოვოთ მოსწავლეებს დახაზონ წრეწირი და გაავლონ ქორდა. დახაზონ ამ ქორდაზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები (ორივე რკალზე). შეკითხვები:

1) დაასახელეთ ტოლი კუთხეები;

2) რამდენი განსხვავებული კუთხე მიიღეთ;

3) შეადარეთ განსხვავებული კუთხეების სინუსები.
4) მიღებული სამკუთხედებიდან ამოარჩიეთ მართკუთხა და იპოვეთ $\dfrac{a}{\sin\alpha}$, თუ წრეწირის რადიუსია R.

ამოხსნები, მითითებები:

5. $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R$ R=15.

6. $\dfrac{16\sqrt{3}}{\sin\beta} = 32$ β=30° ან 150°.

7. K(1;2) KN=3. ე.ი. $S_{OKN} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3$.

8. 5·5 დაფის ფართობია 25, ხოლო დომინოს ქვის 2. არ შეიძლება.

9. ასეთი რიცხვის ციფრთა ჯამი იქნება 300. 300 იყოფა 3-ზე და არ იყოფა 9-ზე. ე.ი. ეს რიცხვი ვერ იქნება სრული კვადრატი.

10. 2003≡1(mod7)
2004≡2(mod7)
2005≡3(mod7)
2006^3≡1(mod7)
2003·2004·2005+2006^3≡(6+1)(mod7) ე.ი. უნაშთოდ იყოფა 7-ზე.

4. სამკუთხედის ბისექტრისის სიგრძისა და ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები

რეზიუმე:

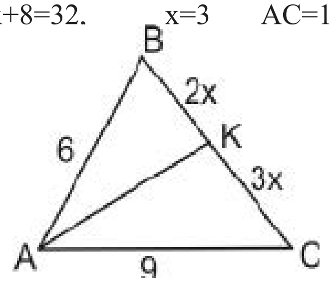
მოსწავლეებს გავახსენოთ სამკუთხედის ბისექტრისის თვისება, ვთხოვოთ ჩამოთვალონ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი მათთვის ცნობილი ფორმულები, დაახასიათონ ისინი, ანუ ჩამოთვალონ, თუ რა მონაცემები უნდა ჰქონდეთ, რომ შეძლონ ამ ფორმულების გამოყენებით სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა.

ამოხსნები, მითითებები:

2. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$ ე.ი. BC=10.

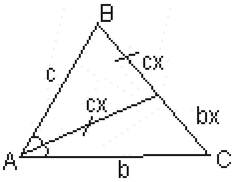
4. AB≡3x AC=5x
8x+8=32. x=3 AC=15.

5.



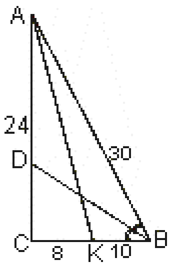
I $\dfrac{6}{9} = \dfrac{6}{KC}$. KC=9 მივიღეთ BC=15. არ შეიძლება.

II. 3x=6 BC=10.

6. 

$$c^2x^2 = bc - bcx^2$$

$$x^2 = \frac{bc}{c^2 + bc} \qquad x = \sqrt{\frac{20}{25+20}} = \frac{2}{3}$$

7. 

AB=30

$$AK = \sqrt{576+64} = 8\sqrt{10}$$

$$BD = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}.$$

11. $R = \sqrt{225+64} = 17$.

$S = pr = 100 \cdot 17 = 1700$.

12. AB=9 AC=17, ე.ი. BC=10.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{85}{8}.$$

16. $S_{OMAD} = x_A \cdot y_A = k$, $\qquad S_{MAKN} = k - S_{ONKD} = 3$;

$S_{ONBP} = x_B \cdot y_B = k \qquad S_{DKBP} = k - S_{ONKD} = 3$.

17.

```
1089708 |12
108     |90809
  97
  96
   108
   108
     0
```

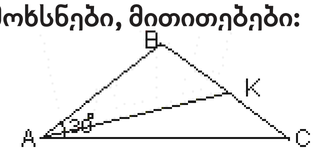
18. $n^2+8n+15=(n+4)^2-1$.

5. სამკუთხედების ამოხსნა

რეზიუმე:

მოსწავლეებს განვუმარტოთ თუ რას ნიშნავს სამკუთხედების ამოხსნა, ვთხოვოთ მოიყვანონ მაგალითი, როცა საკმარისია ერთი, ორი მონაცემი.

ამოხსნები, მითითებები:

5. 

კოსინუსების თეორემით AB=BC=10

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ BK=x}$$

$$KC = x\sqrt{3} \qquad x(\sqrt{3}+1) = 10 \qquad x = 5(\sqrt{3}-1).$$

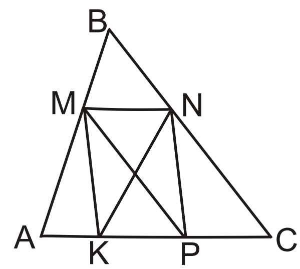
$AK = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot KC} = \sqrt{100\sqrt{3} - x^2\sqrt{3} =}$.

$\sqrt{100\sqrt{3} - 25(4-2\sqrt{3})\sqrt{3}} = \sqrt{150}$.

6. $BB_1=5$ $AA_1=7$ $CC_1=10$.

$AO = \frac{14}{3}$ $CO = \frac{20}{3}$ $OB_1 = \frac{5}{3}$ მედიანის ფორმულას ვწერთ AOC სამკუთხედში AC-ს საპოვნელად.

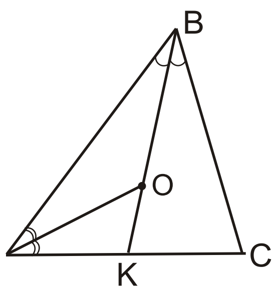
IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები



1. NK||AB; MP||BC. ე.ი. AK=MN=KP=PC=6, მივიღეთ AC=18. ამის შემდეგ განვიხილოთ მსგავსება ΔAMP~ΔABC, $\frac{MP}{BC} = \frac{2}{3}$, MP=10, ანალოგიურად NK=6. $NK^2 + MP^2 = 2(MN^2 + MK^2)$, საიდანაც $MK = 4\sqrt{2}$.

2. ცხადია, AM არის A კუთხის ბისექტრისა.

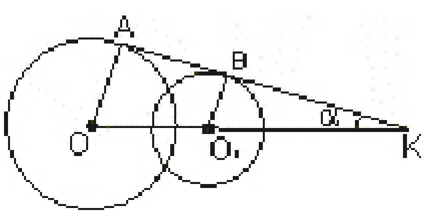
3.



AK=10 KC=8.

$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KC} = \frac{3}{2}$.

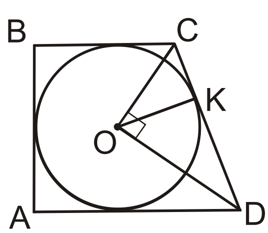
6.



ΔAOK ⇒ OK=30.

$\Delta BO_1K \Rightarrow O_1K = 18$, ე.ი. $OO_1 = 12$.

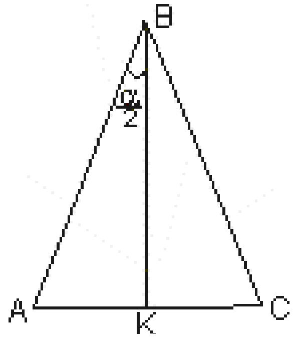
7.



განვ. ΔCOD

$\angle ODC = \frac{\angle ADC}{2} = 30^O$.

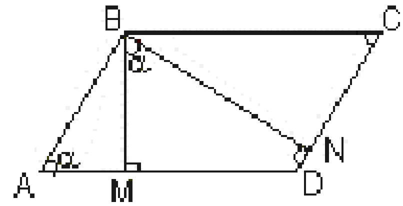
∠COD=90° (შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ბისექტრისებს შორის)< ე.ი. CD=2OC=20. OK=OCsin60°=5$\sqrt{3}$. OK წარმოადგენს წრეწირის რადიუსს. AB=2r=10$\sqrt{3}$. $P_{ABCD} = 2(AB + CD) = 2(20 + 10\sqrt{3}) = 20(\sqrt{3} + 2)$ ·

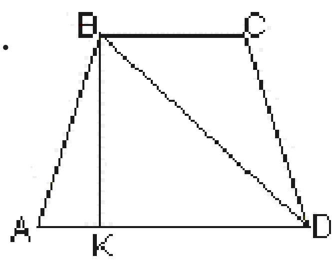
8. 

ΔABK-დან $AK = 16\sqrt{3}$

$$R = \frac{AB^2 \cdot AC}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AC} = 98$$

9. ვიცით, რომ პარალელოგრამის კუთხე სიმაღლეებს შორის კუთხის ტოლია. ე.ი. ∠A=∠C=α. ΔABM-დან $AB = \frac{2}{3}$ ΔBCN-დან $BC = \frac{4}{3}$; AC ვიპოვოთ კოსინუსების თეორემით ADC სამკუთხედიდან $AC = 4\sqrt{\frac{2}{7}}$.



12. 

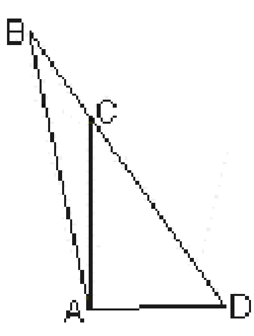
AK=6 AB=10
KD=15 BD=17
ABCD ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ვიპო-ვოთ როგორც ABD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი $R = \frac{85}{8}$.

16. განვიხილოთ ABC სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედი, რომლისთვისაც $a_1 = \frac{a}{a} = 1$, მაშინ

$b_1 = \frac{b}{a}$ და $c_1 = \frac{c}{a}$. მივიღებთ $\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 = 1$. $\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a} < 1\right) \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^2$ და

$\left(\frac{c}{a}\right)^3 < \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 > \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 = 1$. ე.ი. $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 > a_1^2 \Rightarrow$ სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

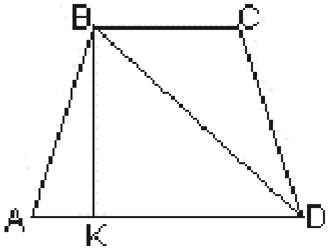
17. ვღებულობთ, რომ მედიანა იმ გვერდის ნახევარია, რომლის მიმართაც არის გავლებული, ე.ი. სამკუთხედი მართკუთხაა.

19. 

AD=AC=1
∠D=∠ACD=45°
∠BCA=135°

$$AB = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\cdot$$

21.



$AK=2 \quad BK=\sqrt{12}$

$BD=\sqrt{61} \qquad \Delta ABD$ -ში

61=16+81–2·4·9·cosA $\qquad \cos A=\dfrac{1}{2} \qquad \angle A=60°.$

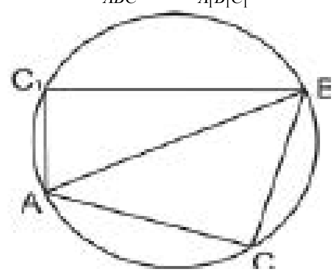
$\angle C=60°.$

IV თავის ტესტი

1 ვარიანტი

1. $\angle A=\angle C$. **2.** $\hat{C}<\hat{A}<\hat{B}$. **3.** $\angle C=90°$. **4.** $S_{ABC}>S_{A_1B_1C_1}$. **5.** $S_{ABC}<S_{A_1B_1C_1}$.

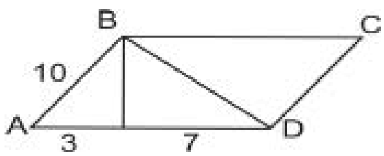
6. $\left(\begin{array}{l}\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{B_1C_1}{\sin A_1}=2R\\ \sin A>\sin A_1\end{array}\right)\Rightarrow BC<B_1C_1$. **7.** კი. **8.** არა. **9.** $\hat{C}<\hat{C}_1$.



10. $2\sqrt{13}$ სმ. **11.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$; $\cos\beta=\dfrac{9}{16}$; $\cos\gamma=\dfrac{3}{4}$.

12. გვაქვს ორი შემთხვევა

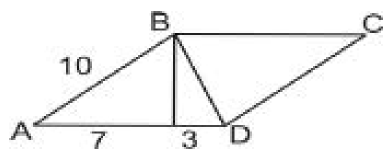
ა)



$h^2=100-9=91$

$BD=\sqrt{91+49}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$

ბ)



$h^2=100-49=51$

$BD^2=\sqrt{51+9}=2\sqrt{15}$ ·

II ვარიანტი

1. AB=AC. **2.** $\hat{A}<\hat{C}<\hat{B}$. **3.** $\angle A=90°$. **4.** $\hat{B}<\hat{B}_1$. **5.** $S_{ABC}<S_{A_1B_1C_1}$. **6.** $BC<B_1C_1$. **7.** კი. **8.** არა.

9. $\hat{C}>\hat{C}_1$. **10.** $2\sqrt{37}$ სმ. **11.** $\dfrac{2}{\sin 75^0}=\dfrac{8}{\sin\beta}$ · $\gamma=105^0-\beta$. **12.** $3\sqrt{3}$ სმ.

V თავი

2. ირაციონალური გამოსახულების გამარტივება

რეზიუმე:

შევახსენოთ მოსწავლეებს n-ური ხარისხის ფესვის თვისებები, მოქმედებები მათზე. გაკვეთილი ფაქტიურად ემსახურება უკვე შესწავლილი მასალის გამეორებას. პარაგრაფის მაგალითები მოსწავლეებს განუმტკიცებს არსებულ ცოდნას და შეამზადებს მათ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხების შემცველ გამოსახულებებზე ანალოგიური მოქმედებების ჩასატარებლად.

ამოხსნები, მითითებები:

4. ა) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{81}$; $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{27}$; $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}$; $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{16}$, ე.ი. $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$.

12. ა) $\sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)^3} = \sqrt{\sqrt[20]{\frac{x^8x^5}{x^{10}}}} = \sqrt[40]{x^3}$; ბ) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[12]{a^{11}}} = \sqrt[60]{a^{30}} = \sqrt{a}$.

13. ა) მაგ. $(4-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=6$; ბ) მაგ. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$.

15. ა) $\frac{1}{1-4\sqrt{5}} = \frac{1+4\sqrt{5}}{-79}$;

გ) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{3-(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{3-3-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{4}$;

ვ) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$; ზ) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{9}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81})}{-1}$.

16. ა) $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2+4\sqrt{x-2}+4} + \sqrt{x-2+2\sqrt{x-2}+1} =$
$= \sqrt{(\sqrt{x-2}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} = \sqrt{x-2}+2+|\sqrt{x-2}-1|$

ცხადია, $x\geq 2$, თუ $\sqrt{x-1}\geq 1$, ანუ $x\geq 3$, მაშინ მივიღებთ $2\sqrt{x-2}+1$. თუ $2\leq x<3$, მაშინ $\sqrt{x-2}+2+1-\sqrt{x-2}=3$;

ბ) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4} - \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} =$ $x\geq 1$.
$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = 1$

17. ა) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{9-6\sqrt{2}+2} = 3-\sqrt{2}$; ბ) $\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{7-4\sqrt{7}+4} = \sqrt{7}-2$;

გ) $\sqrt{5}+\sqrt[6]{(\sqrt{5}-3)^{2\,3}} = \sqrt{5}+\sqrt[6]{(\sqrt{5}-3)^6} = \sqrt{5}+|\sqrt{5}-3| = 3$.

18. ა) $\sqrt{\frac{a-16\sqrt{ab}+100b}{\sqrt{a}-6\sqrt[4]{ab}+10\sqrt{b}}-\sqrt{b}} - \sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b} = \sqrt{\frac{a+20\sqrt{ab}+100b-36\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-6\sqrt[4]{ab}+10\sqrt{b}}-\sqrt{b}} - \sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b} =$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{a}+10\sqrt{b})^2-36\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-6\sqrt[4]{ab}+10\sqrt{b}}-\sqrt{b}} - \sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{a}+10\sqrt{b}-6\sqrt[4]{ab})(\sqrt{a}+10\sqrt{b}+6\sqrt[4]{ab})}{\sqrt{a}-6\sqrt[4]{ab}+10\sqrt{b}}-\sqrt{b}} - \sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b} =$$

$$\sqrt{\sqrt{a}+10\sqrt{b}+6\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}} - \sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a}+3\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b} = 0.$$

19. ა) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}=\dfrac{\sqrt[4]{21\sqrt[3]{2}+60\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[12]{2^{13}}+\sqrt[12]{3^{12}\cdot 2}}=\dfrac{3\sqrt[12]{2}}{5\sqrt[12]{2}}=\dfrac{3}{5}$;

ბ) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\dfrac{\sqrt[6]{(9+6\sqrt{2})(9-6\sqrt{2})}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\dfrac{\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

3. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი

რეზიუმე:

განვმარტოთ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი და ვაჩვენოთ მოსწავლეებს, რომ მისთვის სამართლიანია ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ყველა თვისება.

ამოხსნები, მითითებები:

10. ა) გამარტივების შედეგად ვღებულობთ $\frac{b}{a}$-ს. ჩასმის შედეგად — 3-ს.

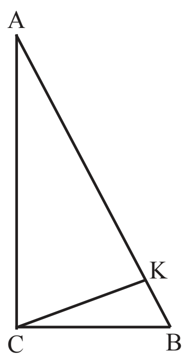
11. ა) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$ გამოსახულება შეიძლება დავშალოთ კვადრატების სხვაობად:
$\left((ab)^{\frac{1}{4}}-(ac)^{\frac{1}{4}}\right)\left((ab)^{\frac{1}{4}}+(ac)^{\frac{1}{4}}\right)$. შეიძლება კუბების სხვაობად, ვაჩვენოთ მოსწავლეებს, რომ $a^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3$;

ე) $a+4=a+4\sqrt{a}+4-4\sqrt{a}=(\sqrt{a}+2)^2-4\sqrt{a}=(\sqrt{a}+2-2\sqrt[4]{a})(\sqrt{a}+2+2\sqrt[4]{a})$.

15. B(6;0), ე.ი. A(3;0) $12=3+x_2$ $x_2=9$.
$m+8=3\cdot 9$, საიდანაც $m=19$.

17. ა) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=1$.

18.



$\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AC^2}{BC^2}=\dfrac{16}{9}$

$S_{ACK}=16S$ $S_{CKB}=9S$

$7S=84$ $S=12$
$S_{ABC}=25S=300$სმ^2.

20. ისრის სიჩქარე 60 დან/სთ, პატარა ისრის 5 დან/სთ. მათ შორის მანძილი იფარება სიჩქარეების სხვაობით 55 დან/სთ, ე.ი. 1 წთ-ში მათ შორის დაიფარება $\frac{55}{60}$ დან/სთ, 38 წთ-ში – $\frac{55\cdot 38}{60}$ დან, ან რაც იგივეა $\left(\frac{55\cdot 38}{60}\cdot 6\right)^\circ=209^\circ$. 7 სთ-ზე მათ შორის იყო 210°, ე.ი. 7 სთ-სა და 38 წთ-ზე იქნება 1°.

21. $(a^2+b^2)^2+7a^2b^2=(a^2-b^2)^2+11a^2b^2=(a-b)^2(a+b)^2+11a^2b^2 \vdots 11$.

4. გამოსახულების გამარტივება

ამოხსნები, მითითებები:

2. ა) $\sqrt{9a^{-\frac{1}{2}}b+6b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{9a^{-\frac{1}{2}}b+12b^{\frac{1}{2}}+4a^{\frac{1}{2}}}=3a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}-3a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-2a^{-\frac{1}{4}}=-a^{-\frac{1}{4}}.$

3. გ) $\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{14-6\sqrt{5}}-4}=\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{9-6\sqrt{5}+5}-4}=\sqrt{5}+\sqrt{6(3-\sqrt{5})-4}=$
$=\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=3$

5. ბ) $\dfrac{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})^2+(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})^2}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^{-1}\left(a+(ab)^{\frac{1}{2}}\right)}:\dfrac{b-2\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=\dfrac{(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\cdot\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}=2;$

გ) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{(\sqrt[3]{a}+1)^2(\sqrt[3]{a}-1)^{-2}+3}{\dfrac{(\sqrt[3]{a}-1)^2+3(\sqrt[3]{a}+1)^2}{(\sqrt[3]{a}+1)^2}}\cdot\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{(\sqrt[3]{a}+1)^2}{(\sqrt[3]{a}-1)^2}\cdot\dfrac{4\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt[3]{a}+4}{4\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a}+4}\cdot\dfrac{a-1}{a+1}=$

$=\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}=\dfrac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}=-1$

8. გ) $(\sqrt{\sqrt[3]{2}}+\sqrt{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})^2})^3=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})^3=5.$

5. თვლის სისტემები

რეზიუმე:

წინა კლასებიდან მოსწავლეებს უკვე აქვთ წარმოდგენა თვლის სისტემებზე. სასურველია მასწავლებელმა წინა გაკვეთილზე დაავალოს გადახედონ უკვე გავლილ მასალას.

ამოხსნები, მითითებები:

3. ა) 231:5=46(1) $a_0=1$.
46:5=9(1) $a_1=1$.
9:5=1(4) $a_2=4$.
1<5 $a_3=1$.
$(231)_{10}=(1411)_5$.

ბ) 375:8=46(7) $a_0=7$.
46:8=5(6) $a_1=6$.
5<8 $a_3=5$.
$(375)_{10}=(567)_8$.

ე) 51:2=25(1) $a_0=1$.
25:2=12(1) $a_1=1$.
12:2=6(0) $a_2=0$.
6:2=3(0) $a_3=0$.
3:2=1(1) $a_4=1$.
1<2 1 $a_5=1$.
$(51)_{10}=(110011)_2$

4. ა)
$$\begin{array}{r} (2357)_9 \\ +\ (357)_9 \\ \hline (2457)_9 \end{array}$$

ბ)
$$\begin{array}{r} (1526)_7 \\ -\ (235)_7 \\ \hline (1261)_7 \end{array}$$

გ)
$$\begin{array}{r} (232)_6 \\ (152)_6 \\ (504)_6 \\ (1544)_6 \\ (232)_6 \\ (43544)_6 \end{array}$$

5. ა) $236_8=2\cdot8^2+3\cdot8^1+6=(158)_{10}$.
გ) $(7771)_9=7\cdot9^3+7\cdot9^2+7\cdot9+1=5103+567+63+1=(5734)_{10}$.

6. ა) 57+31=110 7+1=10 — რვაობითში.
ბ) 125+342=511 5+2=11 — ექვსობითში.

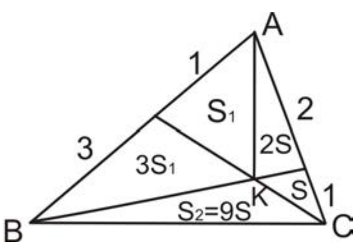
7. ა) $(12)_{10}-(25)_6=(12)_{10}-(17)_{10}<0$.
გ) $(25)_6=2\cdot 6^1+5=(17)_{10}$.

10. ა) 22222. ბ) 77777. გ) $(11111)_2=2^4+2^3+2^2+2+1=16+8+4+2+1=(31)_{10}$.

12. $f\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)=2x+1$. $\frac{2x-1}{x+3}=4\Rightarrow 2x-1=4x+12\Rightarrow x=-\frac{13}{2}$.

$f(4)=2\left(-\frac{13}{2}\right)+1=-12.$

13.



$\frac{S_{ACF}}{S_{CFB}}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3\cdot S_{ACF}=S_{CFB}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(3S+S_1)=S_2+3S_1\Rightarrow 9S_2$ (1)

$\frac{S_2+S}{4S_1+2S}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_2=2S_1$.

(1)-ს გათვალისწინებით $9S=2S_1\Rightarrow\frac{S}{S_1}=\frac{2}{9}$ ე.ი. $S=2x$; $S_1=9x$ და $S_2=18x$.

$S_{ABC}=4S_1+3S+S_2=60x=6\Rightarrow x=\frac{1}{10}$.

$S_{BFK}+S_{EKC}=S+3S_1=29x=2{,}9$

შეამოწმე შენი ცოდნა

1) ა; 2) ბ; 3) ბ; 4) ა; 5) გ; 6) გ; 7) ბ; 8) ა; 9) ა; 10) გ.

V თავის დამატებითი სავარჯიშოები

6. გ) $((1-\sqrt{2})^2)^{\frac{3}{2}}-5\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^3-5\sqrt{2}=-7$;
დ) $\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{14-6\sqrt{5}}-4}=\sqrt{5}+\sqrt{6(3-\sqrt{5})-4}=\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=3$.

VI თავი

1. წესიერი მრავალკუთხედები

რეზიუმე:

წინა კლასში გავეცანით წესიერ მრავალკუთხედებს, ვისწავლეთ წრეწირზე შემოხაზული წესიერი n-კუთხედების აგება, როცა ამავე წრეწირში ჩახაზული იყო წესიერი n-კუთხედი.
ვიცით, როგორ ავაგოთ წესიერი 2n-კუთხედი, როცა გვაქვს აგებული წესიერი n-კუთხედი.
პარაგრაფში მოცემულია დავალება წყვილებისათვის.
1. გავავლოთ სამკუთხედის გვერდების შუამართობები წრეწირის მცირე რკალებთან გადაკვეთამდე. ცხადია, მიღებული 6 წერტილი (სამი წერტილი სამკუთხედის წვეროებია) იქნება წესიერი ექვსკუთხედის წვეროები. მიღებული 6 წერტილი მიმდევრობით შევაერთოთ.
2. ჩახაზული ხუთკუთხედის წვეროებზე გავავლოთ წრეწირის მხებები ერთმანეთთან გადაკვეთამდე. მხებების კვეთის წერტილები იქნება შემოხაზული წესიერი ხუთკუთხედის წვეროები.
პარაგრაფში მოცემული ინდივიდუალური შეკითხვების პასუხები.
ჭეშმარიტია თუ არა, რომ:
1) ჭ; 2) მც; 3) მც; 4) მც; 5) ჭ; 6) მც.
შეიძლება თუ არა, რომ:
1) არა; 2) არა; 3) არა; 4) არა.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $\left.\begin{aligned} h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ h &= 3r \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}r$.

ბ) a=2r; გ) $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$.

2. ა) $\left.\begin{aligned} h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ R &= \frac{2}{3}h \Rightarrow h = \frac{3}{2}R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

ბ) კვადრატზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი დიაგონალის ნახევარია, ე.ი. $R = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, სადაც $a = \sqrt{2}R$.
გ) a=R.

3. ა) $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; ბ) $5\sqrt{2}$; 5.

გ) 10; $5\sqrt{3}$.

4. ბ) წესიერი ოთხკუთხედის წვეროებმა უნდა გაყოს წრეწირი 4 ტოლ ნაწილად. გავატაროთ ორი ურთიერთმართობული დიამეტრი, მათი წრეწირთან კვეთის წერტილები წარმოადგენს კვადრატის წვეროებს.
გ) $a_6 = R$; ამიტომ წრეწირის ნებისმიერი A_1 წერტილიდან გადავდოთ რადიუსის ტოლი ქორდა, რომელმაც წრეწირი გადაკვეთა წერტილში, შემდეგ A_2 წერტილიდან გადავდოთ რადიუსის

ტოლი ქორდა და ა.შ. ცხადია A_1 და A_2 წერტილები ერთმანეთს დაემთხვევა. მიღებული $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ექვსკუთხედი იქნება წესიერი.

5. $\left.\begin{matrix} R-r=m \\ R=2r \end{matrix}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} r=m \\ r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6} \end{matrix}\right) \Rightarrow m=\dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a=2\sqrt{3}m$.

6. $S_{\text{კვადრატის}}=a^2_{\text{კვ}}=54 \Rightarrow a_{\text{კვ}}=3\sqrt{6}$ $\qquad \dfrac{a\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{3}\cdot R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $a=R\sqrt{3}=9$; p=27.

7. $a_6=84$, $S_6=6\cdot\dfrac{84^2\cdot\sqrt{3}}{4}=6\cdot 42^2\sqrt{3}$.

$S_3==6\cdot 42^2\sqrt{3}=\dfrac{{a_3}^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2=4\cdot 6\cdot 42^2 \Rightarrow a=84\sqrt{6}$.

9. $R=a_6$ $\qquad S_6=6\cdot\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}=6\dfrac{16\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4}=72$.

10. $S_6=3R^2\sin 60^O=3{,}25\sqrt{3} \Rightarrow R^2=\dfrac{13}{6}$.

$S_{12}=6R^2\sin 30^o=6{,}5$.

11. $S_n=p_n\cdot r$ (p_n პერიმეტრის ნახევარია). 60=10r $\Rightarrow$ r=6.

12. n=3 შემოხაზული≡b; ჩახაზული≡a. $\qquad r=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $\qquad r=\dfrac{b\sqrt{3}}{6}$; $\qquad \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$;

n=6; $r=\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$; a=r; $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13. $S_6=6\cdot\dfrac{{a_6}^2\sqrt{3}}{4}=150\sqrt{3} \Rightarrow {a_6}^2=100$. $a_6=10$.

15. ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილი y=x–6 და $y=-\dfrac{1}{2}x+6$ წრფეების: (8;2)

S=$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2$=12.

17. (A+1)⋮3
7A+4=7A+7–3=7(A+1)–3. საკლებიც და მაკლებიც იყოფა სამზე, ანუ სხვაობაც იყოფა 3-ზე.

18. 35–B=44–(9+B), ე.ი. (9+B)⋮11, მაგრამ (A+2)⋮11, ე.ი. (A+2)+(9+B)=11+(A+B) იყოფა 11-ზე. ე.ი. (A+B)⋮11.

2. კუთხის რადიანული ზომა

რეზიუმე:

სასურველია, წინა დღეს დავავალოთ მოსწავლეებს მოიტანონ ძაფი, დანაყოფებიანი სახაზავი და ფარგალი.
დავალება: დახაზეთ კონცენტრული წრეწირები, აიღეთ რაიმე ცენტრალური კუთხე, თითოეული წრეწირისათვის გაზომეთ ამ ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალი და იპოვეთ ამ რკალის სიგრძის შეფარდება რადიუსის სიგრძესთან. მიღებული შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

ამოხსნები, მითითებები:

7. $125!=1\cdot2\cdot3\cdots125$.

დავთვალოთ თანამამრავლ 5-ების რაოდენობა. 5-ის ჯერადი 1-დან 125-მდე არის $\frac{125}{5}$, 25-ის ჯერადი $\frac{125}{25}$; 125-ის ჯერადი კი 1, ე.ი. თანამამრავლი 5 იქნება 25+5+1=31. ე.ი. ნამრავლი ბოლოვდება 31 ნულით.

8. ა) $n^5+4n=n(n^4+4)$ n^4-ის 5-ზე გაყოფია ნაშთებია 0, 1 ანუ ან n იყოფა 5-ზე, ან n^4+4.

ბ) $n(n^2-1)$ იყოფა სამზე, თუ n იყოფა 3-ზე, ან n^2-1 იყოფა 3-ზე. n^2-ს სამზე გაყოფის ნაშთებია 0 და 1. 0-ია თუ $n=3\vdots k$, ე.ი. ან $n\vdots 3$ ან $(n^2-1)\vdots 3$.

9. $m+n=\frac{4mn}{(m-n)^2}+1=\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2$.

3. სეგმენტი. სეგმენტის ფართობი

რეზიუმე:

გაკვეთილი იწყება პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული, წყვილებისათვის განკუთვნილი სამუშაოთი. $S_{წრ}=\pi R^2$; $d=2R=a_{კვ}\sqrt{2}\cdot$ $a_{კვ}=R\sqrt{2}$. $S_{კვ}=2R^2$.
$S_{წრ}-S_{კვ}=R^2(\pi-2)$. ინდივიდუალური შეკითხვების პასუხები:
მართალია თუ არა, რომ:
1) არა; 2) არა; 3) კი; 4) ა) ტოლფერდაა; ბ) მართკუთხაა.

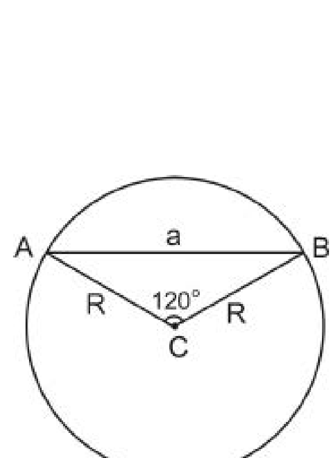
ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) $S_{სეგ}=\frac{\pi R^2}{360}40-\frac{1}{2}R^2\sin 40^\circ=R^2(\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}\sin 40^\circ)\cdot$

5. $\Delta ABC\Rightarrow a^2=2R^2-2R^2\cos120^\circ=2R^2(1+\frac{1}{2})=$

$=3R^2\Rightarrow R^2=\frac{a^2}{3}$.

$S_{სეგ}=\frac{\pi}{360}\cdot120\cdot\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a^2}{9}-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.



8. უსგ $(x;y)\equiv k$. $x=ka$ და $y=kb$.

$2k^3a^3=k^4b^4 \Rightarrow 2a^3=kb^4$. ვთქვათ $k=2$, მაშინ $a^3=b^4$, ავიღოთ $a=m^4$ და $b=m^3$; $x=2m^4$, $y=2m^3$.
$m=1$, მაშინ $x=y=2$.
$m=2$, მაშინ $x=32$; $y=16$.

9. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-2 \Rightarrow \frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+2x_1x_2}{x_1x_2}=0 \Rightarrow (x_1+x_2)^2=0 \Rightarrow x_1+x_2=0$. ე.ი. $a-3=0$ ანუ $a=3$

$x_1 \cdot x_2 = a+2=5$.

10. $x_1 = x_2^{\ -1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m-1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow m=3$. $\quad x_1+x_2=m+2=5$.

11. ΔAOB მართკუთხაა, $\angle CAO=135° \Rightarrow \angle A=\angle B=45°$. მაშასადამე, BC წრფის განტოლებაა $y=x+b$ ($k=1$). ჩავსვათ C წერტილის კოორდინატები, $6=b+2 \Rightarrow b=4$, ე.ი. $y=x+4$. ანუ წრფე y ღერძს კვეთს $y=4$ წერტილში, ანუ სამკუთხედის კათეტების სიგრძეა 4 და $S=8$.

VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. არა, რადგან განტოლება $\frac{180^\circ(n-2)}{n}=145^\circ$ არ იხსნება მთელ რიცხვებში.

2. $n=5$, დიაგონალების რაოდენობაა $\frac{n(n-3)}{2}=5$.

3. $P_6=18$ სმ $\Rightarrow a_6=R=3$ სმ.

4. $a_5=2R\sin 36^O \Rightarrow a_5=24\sin 36^\circ$, ე.ი. $P=120\sin 36^\circ$.

5. $a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow 12=8\sqrt{3}\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow \sin\frac{180^\circ}{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
ცხადია, $\frac{180^0}{n}=60^0 \Rightarrow n=3$.

6. $a_6=R=18$ სმ. წრეწირში ჩახაზული კვადრატის დიაგონალი წრეწირის დიამეტრის ტოლია, ე.ი. $a_4\sqrt{2}=36 \Rightarrow a_4=18\sqrt{2}$, ე.ი. $P=72\sqrt{2}$ სმ.

7. $l=36\pi=2\pi R \Rightarrow R=18$. 60°-იან რკალს ჭიმავს რადიუსის ტოლი ქორდა, ანუ ქორდის სიგრძეა 18.

8. $r=\frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a=2\sqrt{3}r$. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\cdot 3r^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}r^2$.

9. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ე.ი. წესიერ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია $\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot a_6=R$. $\quad S=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=6\cdot\frac{16\cdot 3}{16}=18$.

10. $S_8=4\cdot R^2\sin 45^\circ=16\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow R^2=\frac{8}{\sqrt{3}}$.

$S_3=\frac{3}{2}\cdot R^2\sin 120^\circ=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6$.

11. $S_{12} = 6 \cdot R^2 \sin 30^\circ = 18\sqrt{2} \Rightarrow R^2 = 6\sqrt{2}$.

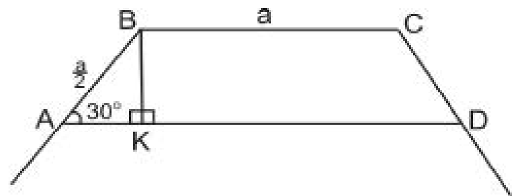
$S_8 = 4 \cdot R^2 \sin 45^\circ = 4 \cdot 6\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 24$.

12. $S_6 = 3 \cdot R^2 \sin 60^\circ = 24 \Rightarrow R^2 = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ $\quad S_{წრ} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi$.

13. $$\left.\begin{array}{l} a_7 = 2 \cdot r \cdot tg\dfrac{\pi}{7} = 2 \cdot 58\cos\dfrac{\pi}{7} \cdot tg\dfrac{\pi}{7} = 2 \cdot 58 \cdot \sin\dfrac{\pi}{7} \\ a_7 = 2R\sin\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow R = 58.$$

14. წესიერი თორმეტკუთხედის შიგა კუთხეა

$\dfrac{180^\circ \cdot 10}{12} = 150^\circ$, ე.ი. $\angle BAK = 30^\circ$.



$\Delta ABK \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ ე.ი. წესიერი ექვსკუთხედის

გვერდი $AD = a + 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = a + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

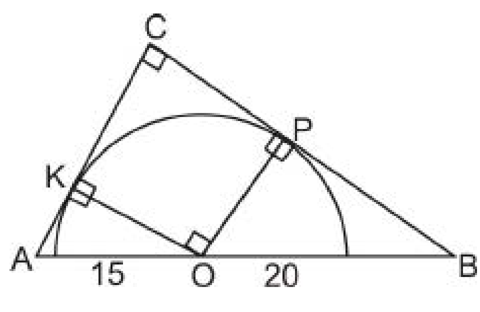
15. ა) R=a $\quad \ell = \dfrac{2\pi R}{6} = \dfrac{\pi \cdot a}{3}$; $\quad$ ბ) $2R^2 = a^2 \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, ე.ი. $\ell = \dfrac{2\pi R}{4} = \dfrac{\pi \cdot a\sqrt{2}}{4}$;

გ) $a = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. $\quad \ell = \dfrac{2\pi R}{3} = \dfrac{2\pi a}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a}{9}$.

16. წრეწირის რადიუსი იყოს R, მაშინ ჩახაზული კვადრატის გვერდი $a = R\sqrt{2}$, პერიმეტრი კი $P = 4\sqrt{2}R$.

$2\pi R = 4\sqrt{2}R + 5 \Rightarrow R = \dfrac{5}{2\pi - 4\sqrt{2}}$. $\quad \ell = 2\pi R = \dfrac{5\pi}{\pi - 2\sqrt{2}}$.

17. O წერტილი არის C კუთხეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი, ამიტომ ის მდებარეობს C კუთხის ბისექტრისაზე, ე.ი. AC:CB=3:4 ანუ AC=3x; CB=4x; AB=5x=35, ანუ x=7, ე.ი. AC=21; CB=28. ცხადია KOPC ოთხკუთხედი კვადრატია, ანუ OK=r.



$\Delta AKO \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{OK}{CB} = \dfrac{AO}{AB} \Rightarrow \dfrac{r}{28} = \dfrac{15}{35} \Rightarrow r = 12$.

$\breve{KP} = \dfrac{2\pi r}{4} = 6\pi$.

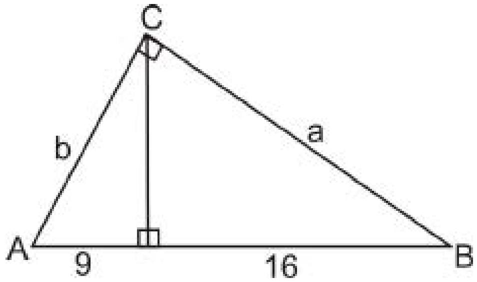
18. $2\pi R = \ell \Rightarrow R = \dfrac{\ell}{2\pi}$, $\quad S = \pi R^2 = \pi\dfrac{\ell^2}{4\pi^2} = \dfrac{\ell^2}{4\pi}$.

21. ჰერონის ფორმულით მივიღებთ $S=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=84$.

$S=pr\Rightarrow 84=21\cdot r\Rightarrow r=4$. $S=\pi R^2=\pi\dfrac{\ell^2}{4\pi^2}=\dfrac{\ell^2}{4\pi}$.

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\frac{65}{8}\Rightarrow \pi R^2=\frac{65^2\pi}{8^2}\;\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\left(\frac{65}{32}\right)^2=\frac{4225}{1024}.$$

22.



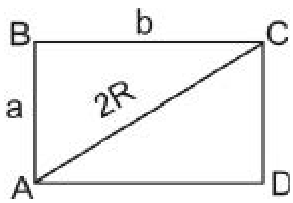
$a^2=16\cdot 25\Rightarrow a=20$. $b^2=9\cdot 16\Rightarrow b=15$.

$r=\dfrac{a+b-c}{2}=5$. $S=\pi r^2=25\pi$. $S=25\pi$ მ².

23. $S=p\cdot r\Rightarrow 24=12\cdot r\Rightarrow r=2$.

$r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{a+b+c-2c}{2}=p-c\Rightarrow 2=12-c\Rightarrow c=10$, R=5, $\pi R^2=25\pi$. S=25πსმ².

24. $2\pi R=5\pi\Rightarrow R=\dfrac{5}{2}$.



AC≡c=2R=5

$$\left.\begin{aligned}&a+b=7\Rightarrow a^2+b^2+2ab=49\\&a^2+b^2=c^2=25\end{aligned}\right)\Rightarrow ab=12=S.$$

25. $S=\pi R^2=65\pi\Rightarrow R^2=65$; $c^2=4R^2=4\cdot 65$ (იხ. N24-ს ნახაზი).

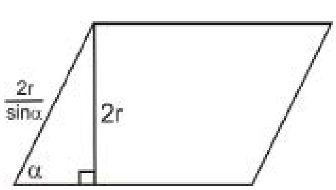
$$\begin{aligned}&a^2+b^2+2ab=22^2\\&a^2+b^2=c^2=4\cdot 65\end{aligned}\;\Rightarrow\left.\begin{aligned}&ab=108\\&a+b=22\end{aligned}\right)\Rightarrow a$$ და b არის $x^2-22x+108=0$ განტოლების ამონახსნები.
პასუხი: 8 და 14.

26. $\begin{cases}a+b=13\\ab=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=5\end{cases}\Rightarrow c^2=89$. $S=\pi R^2=\pi\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{89\pi}{4}$.

27. რადგან რომბის გვერდი მცირე დიაგონალის ტოლია, ე.ი. რომბის მახვილი კუთხეა 60°.

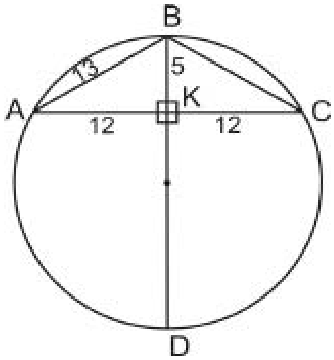
$$S=a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi R^2\Rightarrow a^2=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}R.$$

28.



$$\left.\begin{aligned}&S=ah=\frac{4r^2}{\sin\alpha}=\frac{8}{\pi}\\&\pi r^2=\sqrt{3}\Rightarrow r^2=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\end{aligned}\right)\Rightarrow\frac{4\sqrt{3}}{\pi\sin\alpha}=\frac{8}{\pi}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$$

29.



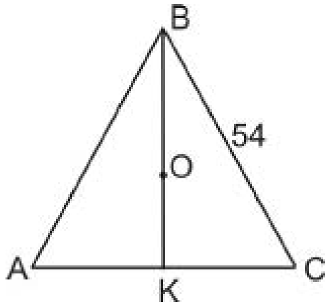
$\Delta ABK \Rightarrow BK=5$

$AK\cdot KC=BK\cdot KD$

$$12^2 = 5\cdot(2R-5) \Rightarrow R=\frac{169}{10}$$

$S=\pi R^2 = 285{,}61\pi$ სმ².

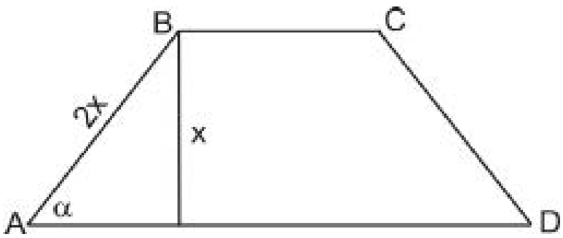
30.



$$OK=\frac{a\sqrt{3}}{6}=9\sqrt{3}=\sqrt{243}>15$$

ე.ი. არის 15 კონცენტრული წრეწირი, რომელთა ცენტრია O და რომლებიც ABC სამკუთხედის შიგნითაა მოთავსებული.

31.

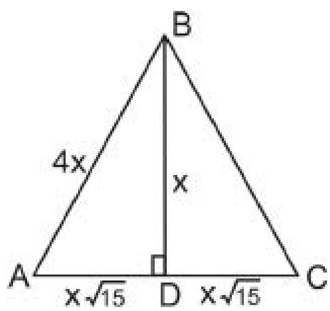


რადგან ტრაპეციაში წრეწირი ჩაიხაზება, ე.ი.

$BC+AD=4x$. $S_{ტრ}=2x^2$, $S_{წრ}=\pi R^2=\pi\frac{x^2}{4}$

$S_{წრ}:S_{ტრ}=\frac{\pi x^2}{4\cdot 2x^2}=\frac{\pi}{8}$.

32.

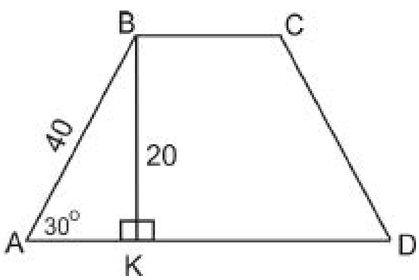


$\Delta ABD \Rightarrow AD=x\sqrt{15}$; $S_\Delta=\sqrt{15}x^2$

$$x\cdot\sqrt{15}\cdot x\cdot\sqrt{15}=x(2R-x)\Rightarrow R=8x$$

$S_{წრ}=64\pi x^2$. $S_{წრ}:S_\Delta=64\pi:\sqrt{15}$

33.

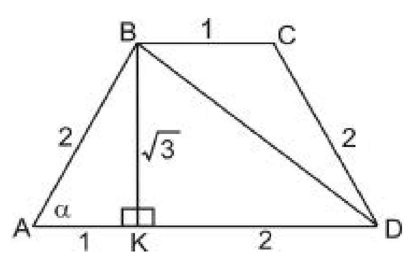


რადგან ტრაპეციაში წრეწირი ჩაიხაზება, ამიტომ ფუძეების ჯამი ტოლია ფერდების ჯამის ე.ი. AB=CD=40

$\angle A=30°$, $\Delta ABK \Rightarrow BK=20 \Rightarrow r=10$.

$S=\pi R^2=100\pi$.

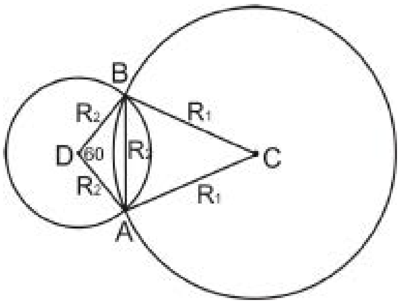
34. რადგან ABCD ტრაპეციაში წრეწირი ჩაიხაზება, ამიტომ AB+CD=BC+AD. რადგან წრეწირი შემოიხაზება, ტრაპეცია ტოლფერდაა, ანუ AB=CD=2, $\Delta BKD \Rightarrow BK=\sqrt{3} \Rightarrow BD=\sqrt{7}$.



ABCD ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირი ABD-ზეც არის შემოხაზული, ამიტომ

$$\Delta ABD \Rightarrow R=\frac{2\cdot 3\sqrt{7}}{4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\ S=\pi R^2=\frac{7}{3}\pi\cdot$$

35.



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi R_1{}^2}{\pi R_2{}^2}=\frac{R_1{}^2}{R_2{}^2}\cdot$$

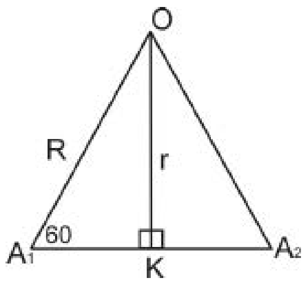
$$\Delta ABC \Rightarrow R_2{}^2=R_1{}^2+R_1{}^2-2R_1R_1\cos 120^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2{}^2=3R_1{}^2 \Rightarrow R_1{}^2:R_2{}^2=1:3\,.$$

36. $S_{რგ}=S_1-S_2=\pi 6^2-\pi 4^2=20\pi$.

38. წრეწირები კონცენტრულია $S=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2-\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\pi\frac{a^2}{4}$.

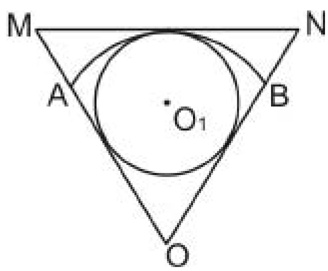
39.



$$\Delta AOK \Rightarrow \frac{R^2}{r^2}=\frac{4}{3}\cdot$$

$$\pi R^2:\pi r^2=R^2:r^2=4:3\,.$$

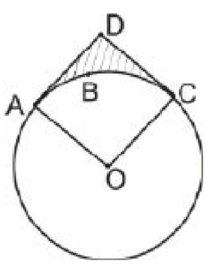
41.



OA=OB=R $\angle O=60°$.

$(O_1;r)$ წრეწირი OMN სამკუთხედშია ჩახაზული, მისი სიმაღლეა R, ე.ი. $r=\frac{R}{3}$.

42.



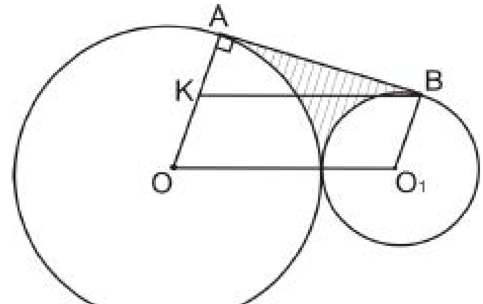
$$S=S_{OADC}-S_{OAC\ (სექტ)}=R^2-\frac{\pi R^2}{4}=R^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

43. BK||OO_1. AK=2r BK=OO_1=4r,

ე.ი. $\angle AKB=60°$. ე.ი. $\angle O=60°$. $\angle O_1=120°$.

$AB=2\sqrt{3rr}=2r\sqrt{3}$. $S=S_{AOO1B}-S_{o(სექტ)}$

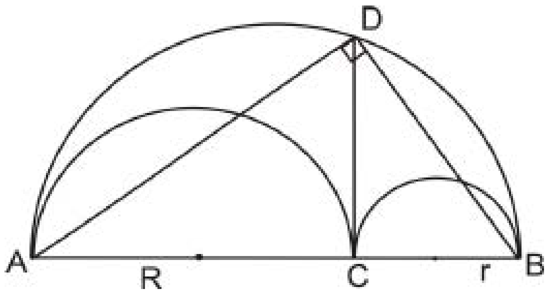
$-S_{O1(სექტ)}=4r^2\sqrt{3}-\frac{11\pi r^2}{6}=r^2\left(4\sqrt{3}-\frac{11\pi}{6}\right)$.



44. $S = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{2}$.

45. $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2(\pi-2)}}$. $S = \pi R^2 - a^2 = \frac{16\pi}{2(\pi-2)} - \frac{16}{\pi-2} = \frac{16(\pi-2)}{2(\pi-2)} = 8$.

46.



დიდი წრის ფართობის ნახევარია $\frac{\pi(R+r)^2}{2}$.

პატარების ჯამია $\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2}$.

განვ. $\left.\begin{array}{l}\Delta ABD \\ \angle D = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow CD^2 = AC \cdot CB = 4Rr$.

$$S = \frac{\pi(R+r)^2}{2} - \frac{\pi(R^2+r^2)}{2} = \frac{\pi}{2}2Rr = \frac{\pi}{4}4Rr = \frac{\pi}{4}CD^2$$

VI თავის ტესტი

I ვარიანტი

1. ექვსკუთხედი. 2. m-კუთხედი. 3) ა) n=4; ბ) n=3. 4. 5. ა) წესიერი მრავალკუთხედის ყველა გვერდი არ არის ტოლი (მცდარია), ბ) წესიერი მრავალკუთხედი არ არის ჩახაზული, ან არ არის შემოხაზული (მცდარია), გ) წესიერ n-კუთხედს არ აქვს n სიმეტრიის ღერძი (მცდარია). 6. $\alpha=120°$.

8. $450(\sqrt{2+1})$. 9. $\frac{5}{2\sin 36^o}$. 10. 12 სმ. 12. 120°-ით. 13. 15. 14. მართალია. 15. აქვს.

II ვარიანტი

1. ხუთკუთხედი. 2. n-კუთხედი. 3) ა) n=3; ბ) n=6; გ) n=3. 4. $a_n<a_m$. 5. ა) წესიერი მრავალკუთხედის ყველა კუთხე ტოლი არ არის (მცდარია), ბ) წესიერ მრავალკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების ცენტრები ერთმანეთს არ ემთხვევა (მცდარია), გ) თუ წესიერ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა ლუწია, მაშინ მას არ აქვს სიმეტრიის ცენტრი (მცდარია).

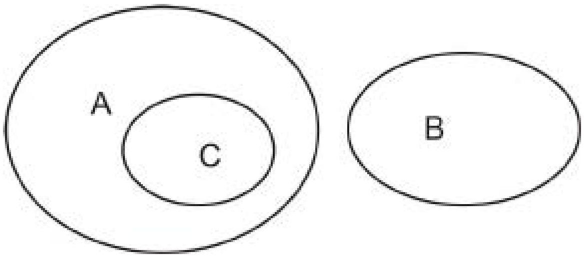
6. მართი. 8. $800\sqrt{2+1}$. 9. $\frac{3}{2\sin 36^o}$. 10. 8 სმ. 12. შეიძლება 60°. 13. 16. 14. მართალია. 15. არა.

VII თავი

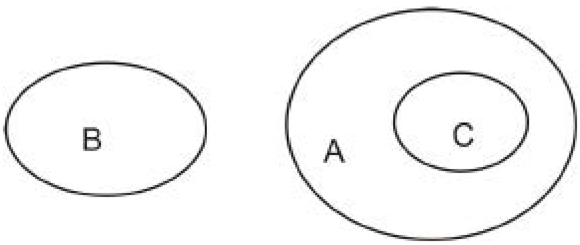
2. ლოგიკური მსჯელობა

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს ლოგიკური მსჯელობის ეილერ — ვენის დიაგრამის სახით გამოსახვა. პარაგრაფში მოცემული წყვილებში გადასაწყვეტი ამოცანებისათვის მივუთითოთ ააგონ ვენის დიაგრამები.

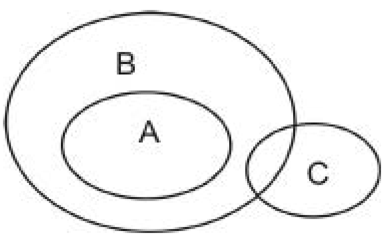


1. A — a ელემენტების სიმრავლე, B — b ელემენტების სიმრავლე, C — c ელემენტების სიმრავლე, ე.ი. მსჯელობა სწორია.



2. ე.ი. $C \cap B = \varnothing$. შესაძლებელია

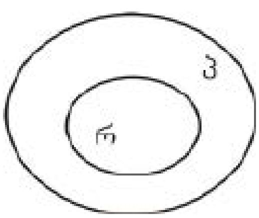
$C \subset A \Rightarrow$ მსჯელობა მცდარია.



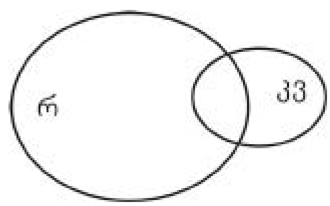
3. $C \cap A = \varnothing \Rightarrow$ მსჯელობა არასწორია.

ამოხსნები, მითითებები:

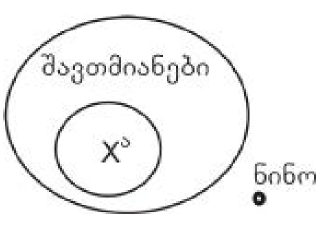
1. ა)



ბ)

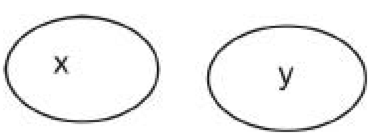


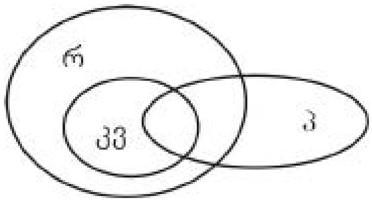
გ)



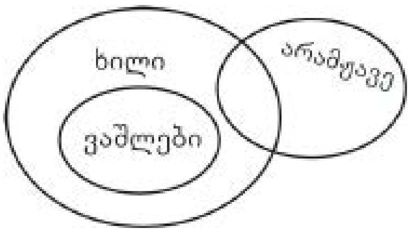
დ)

2.

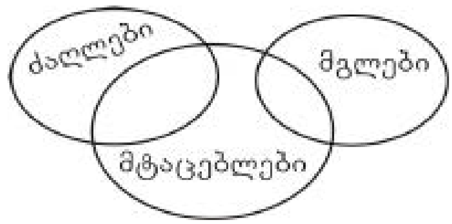


3. 

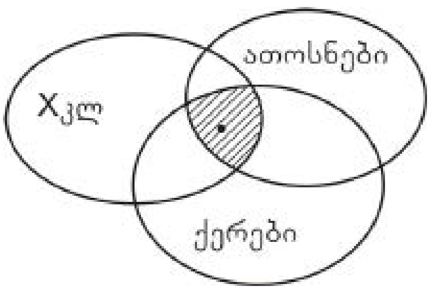
შესაძლოა. მაგრამ არააუცილებელი, ე.ი. არ გამომდინარეობს.

4. ა) 

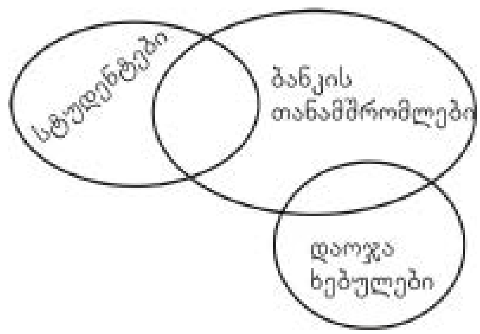
მცდარია;

ბ) 

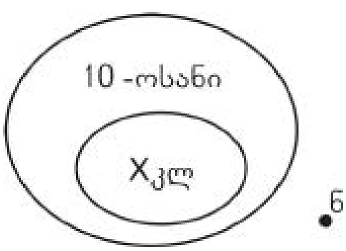
სწორია.

გ) 

სწორია

დ) 

მცდარია

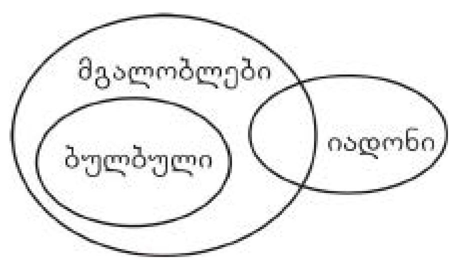
5. ბ) 

ნინი არ არის მე-10 კლასელი.

დ) ივანე შესაძლოა ქართველი იყოს.

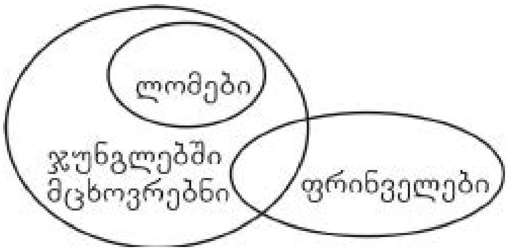
6. ა) 

ე.ი. მცდარია

ბ) 

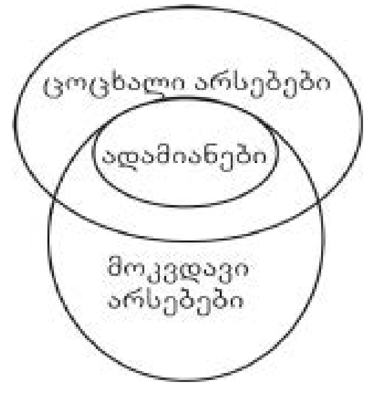
ე.ი. მცდარია.

გ)



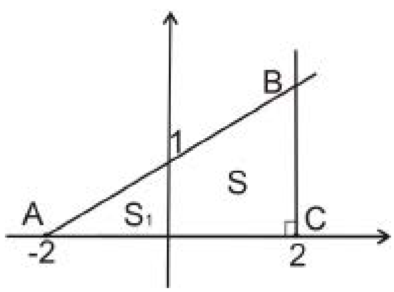
ე.ი. მცდარია

დ)



ე.ი. მცდარია.

8.



დავწეროთ AB წრფის განტოლება $y=kx+b$, ცხადია, $b=1$. მივიღეთ $y=kx+1$. გადია $(-2;0)$ წერტილზე $0=-2k+1 \rightarrow k=0,5$. $y=0,5x+1$. B წერტილის კოორდინატებია $(2;y_1) \Rightarrow y_1=2$. მაშასადამე $BC=2$.

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4=S_1+S \\ S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1 \end{array}\right) \Rightarrow S=3.$$

9. ნატურალური რიცხვის კვადრატის 3-ზე გაყოფის შესაძლო ნაშთებია 0 და 1, $x^2+y^2=z^2$. ტოლობა რომ შედგეს, ამისათვის x-ის და y-ის ერთი ნაშთი მაინც უნდა იყოს 0. (0,1)+(0,1)=(0,1). რ.დ.გ.

10. x და y-დან ერთი მაინც იყოფა 3-ზე (იხ N9), 4-ზე გაყოფის შესაძლო ნაშთებია 0, 1 ე.ი. (0,1)+(0,1)=(0,1) ტოლობა რომ შედგეს მარცხენა მხარეს ერთი მაინც ნოლი უნდა იყოს. მაშასადამე x და y რიცხვებიდან ერთ-ერთი იყოფა 4-ზე. I და II დასკვნიდან გამომდინარეობს, რომ $xy \vdots 12$.

2. ოპერაციები გამონათქვამებზე

რეზიუმე:

გავახსენოთ მოსწავლეებს რა არის გამონათქვამი, საწინააღმდეგო გამონათქვამი, რა შემთხვევაშია ჭეშმარიტი „ან“ და „და“ კავშირით შეერთებული რთული გამონათქვამი. უნდა შეძლონ ასეთი გამონათქვამის საწინააღმდეგო გამონათქვამის ჩამოყალიბება.

ამოხსნები, მითითებები:

6. ა) 2 არ არის რაციონალური რიცხვი; ბ) $8\leq 4$; გ) $9>5$;
დ) არსებობენ 3-ის არაჯერადი ნატურალური რიცხვები;
ე) არც ერთი ნატურალური რიცხვი არ იყოფა 5-ზე;

10. ა) ან 12 არ იყოფა 3-ზე, ან 8 არ იყოფა 5-ზე;
გ) ხვალ ან არ იწვიმებს, ან ყინვა არ იქნება;
დ) ხვალ არც იწვიმებს და ყინვაც არ იქნება.
ე) არც გუდაურში წავალ და არც ბაკურიანში.
ვ) ნიკა არც თეატრში წავა და არც ფეხბურთზე.

11. გიორგის და საბას პასუხები საწინააღმდეგო გამონათქვამებია, ამიტომ თუ ერთი ჭეშმარი-ტია, მაშინ მეორე მცდარია და პირიქით.

	I	II
ნიკა	-	-
გიორგი	+	-
საბა	-	+
ლუკა	-	-

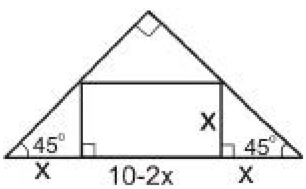
1) ვთქვათ გიორგის ნათქვამია ჭეშმარიტი, მაშინ დანარჩე-ნები ტყუის. ე.ი. თუ მინა საბამ გატეხა, მაშინ ლუკას ნათქ-ვამი სწორი გამოდის.

2) ვთქვათ საბას ნათქვამია სწორი, ე.ი. სწორია, რომ მინა საბამ არ გატეხა. მაშინ რადგან ლუკას ნათქვამი მცდარია, ამიტომ მინა ლუკას გაუტეხავს. ასევე მცდარი გამოდის ნიკას ნათქვამიც.

პასუხია: ლუკა.

12. OL=OK $\Rightarrow$ K(0;4) და L(0;–4). M წერტილის კოორდინატებია M(x_1;4) და რადგან M წერტილი y=2x–4 ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს, ამიტომ $\left.\begin{array}{l} 4 = 2x_1 - 4 \Rightarrow x_1 = 4 = KM \\ KL = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S=$\frac{1}{2}$8·4=16.

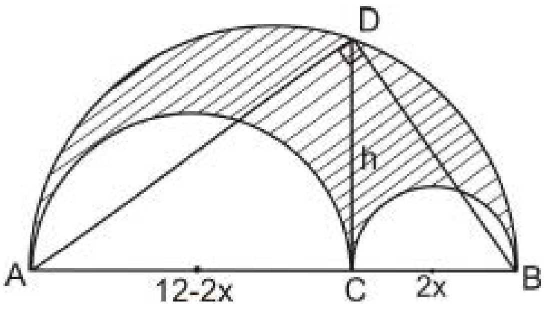
13. S_a=x(10–2x)=–2x²+10x=y.



$$x_0 = \frac{-10}{-4} = 2,5$$

10–2x=5 მართკუთხედის გვერდებია 2,5 და 5.

14. CB=2x დაშტრიხული ნაწილის ფართობი ტოლია:



$$S = \frac{\pi}{2}(36-(6-x)^2 - x^2) = \frac{\pi}{2}(-2x^2 + 12x) =$$

$= \pi(-x^2 + 6x)$. $y = -x^2 + 6x$.

ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას იღებს, როცა $x_0 = \frac{-6}{-2} = 3$. მაშასადამე, BC=6.

3. იმპლიკაცია. ეკვივალენცია

რეზიუმე:

მოსწავლეებლებმა უნდა შეძლონ, რომ მოცემული ორი გამონათქვამიდან შეადგინონ იმპლიკა-ცია. ყურადღება უნდა გამახვილდეს იმაზე, რომ A→B იმპლიკაციის შემთხვევაში არ არის აუცილებელი მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირის არსებობა. მაგალითად A: „ევერესტი საქართველოში მდებარეობს“, B: „თბილისი საქართველოს დედაქალაქია“. მართალია A და B წინადადებები ერთმანეთთან არანაირ კავშირში არ არის, მიუხედავად ამისა, A→B ჭეშმარიტია და B→A მცდარი. მოსწავლეებს ყურადღება უნდა გავუმახვილოთ იმაზე, რომ A←B, რომ A↔B იქნება ჭეშმარიტი, თუ ერთდროულად ჭეშმარიტია A→B და B→A იმპლიკაციები.

ა)

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A→B	$\overline{B}$→$\overline{A}$
ჭ	ჭ	მ	მ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ

ამოხსნები, მითითებები:

3. ბ) თუ წერტილი კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობს, მაშინ იგი თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან.
ე) თუ ადამიანი ლამაზია, მაშინ ის კეთილია.

5. მითითება: შეადგინეთ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი.

7. ა) რიცხვი იყოფა 12-ზე და არ იყოფა 3-ზე.
გ) ეკამ უნარებში 85 ქულა დააგროვა, მაგრამ ვაუჩერი ვერ აიღო..

8. ა) თუ ირინა ქერა არაა, მაშინ ის ევროპელი არ არის.
ბ) თუ ბავშვი სკოლაში დადის, მაშინ მისი ასაკი 6-ზე ნაკლები არ არის.

9. ვთქვათ საძიებელი მანძილია $O_1C=x$ კმ და სხეულის მასა, რომელიც C წერტილშია მოთავსებული იყოს m. მექანიკის კანონის თანახმად $F_1 = k\dfrac{mm_1}{x^2}$, სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია, ასევე მთვარისკენ მიზიდულობის ძალა იქნება $F_2 = k\dfrac{mm_2}{(\ell - x)^2}$, $\ell \approx 3{,}84\cdot 10^5$ კმ, პირობით

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\ell - x)^2} = \frac{m_1}{m_2} \equiv q\,,\ q=81{,}5.\ \frac{x}{\ell - x} = \pm\sqrt{q} \Rightarrow x_1 = \frac{\ell\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}} \approx 3{,}46\cdot 10^5 \text{ (კმ)}.$$

$x_2 = \dfrac{\ell\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} \approx 4{,}32\cdot 10^5$ კმ. ე.ი. OO_1 წრფეზე არსებობს ორი ისეთი C და C_1 წერტილი, სადაც სხეულზე მოქმედი მიზიდულობის ძალები ერთმანეთს უტოლდება.

4. ლოგიკური გამომდინარეობა

რეზიუმე:

ეს გაკვეთილი სასურველია ჩატარდეს ინტეგრირებულ გაკვეთილად ფიზიკის მასწავლებელთან ერთად. N8 და N9 ამოცანები, რომელიც განკუთვნილია ჯგუფური მეცადინეობისათვის ფიზიკის მასწავლებლის დახმარებით გადაწყდება. სასურველია თუ მე-9 ამოცანის ამოხსნის შემდეგ ჩატარდესა შესაბამისი ცდა. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს განასხვავოს ლოგიკური გამომდინარეობა და იმპლიკაცია, ეკვივალენცია და ექვივალენტობა.

ამოხსნები, მითითებები:

1. ა) ჭ; ბ) მცდარია, მაგ. თუ m=4,5; გ) ჭ; დ) ჭ; ე) ჭ.

3. ა) (a⋮3), მაშინ a=3k და $a^2=9k^2$, ე.ი. a^2⋮9.

პირიქით, თუ a^2⋮9, მაშინ $a^2=9k^2$; ე.ი. a=3k და a⋮3.

გ) თუ 13a⋮5, რადგან უ.ს.გ. (13;5)=1, ამიტომ a⋮5,
თუ a⋮5, ⇒ a=5k ⇒ 13a=13·5k ⇒ 13a⋮5.

5. ა) თუ კუთხეები ვერტიკალურია, მაშინ ისინი ტოლია. ბ) თუ სამკუთხედი ტოლგვერდაა, მაშინ მისი კუთხეები ტოლია.

10. სამკუთხედის პერიმეტრი იყოს x, მაშინ კვადრატის იქნება a–x.

$$S=S_2+S=\left(\frac{x}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2=\frac{x^2\sqrt{3}}{9\cdot4}+\frac{a^2-2ax+x^2}{16}=\frac{4\sqrt{3}x^2+9a^2-18ax+9x^2}{9\cdot16}=$$

$$=\frac{(9+4\sqrt{3})x^2-18ax+9a^2}{9\cdot16}$$

$y=(9+4\sqrt{3})x^2-18ax+9a^2$ ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას იღებს, როცა

$$x_0=\frac{18a}{2(9+4\sqrt{3})}=\frac{9}{9+4\sqrt{3}}a\,.\ a-\frac{9a}{9+4\sqrt{3}}=\frac{9a+4\sqrt{3}a-9a}{9+4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}a\,.$$

მავთული იჭრება სამკუთხედისთვის $\frac{9}{9+4\sqrt{3}}a$ და კვადრატისთვის $\frac{4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}a$.

11. ა) $x^2+(2-a)x-a-3=0$
$x_1+x_2=a-2$
$x_1\cdot x_2=-(a+3)$

$$(x_1+x_2)^2=(a-2)^2=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+2x_1x_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(a-2)^2+2(a+3)=a^2-4a+4+2a+6=a^2-2a+4\,.$$

$y=a^2-2a+4$ ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას იღებს $a_0=\frac{2}{2}=1$, a=1;

ბ) $x^2+(1+2a)x+a^2-1=0$

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(1+2a)^2-2(a^2-1)=1+4a+4a^2-2a^2+2=2a^2+4a+3.$$

$a_0=\frac{-4}{4}=-1$, a=–1.

5. ამოცანები ალბათობის თეორიიდან

რეზიუმე:

შესაძლებელია ეს გაკვეთილი ჩატარდეს, როგორც ინტეგრირებული გაკვეთილი ფიზიკის მასწავლებელთან ერთად. ჩატარდეს შესაბამისი ცდები. ამავე თემაზე შესაძლოა მე-2 გაკვეთილის ჩატარებაც უკვე ბიოლოგიის მასწავლებელთან. შესაძლოა კიდევ სხვა საკითხების განხილვა ბიოლოგიიდან (იხ. სანიმუშო გაკვეთილის სცენარი). მოსწავლეებს შევახსენოთ ძირითადი ცნებები და განმარტებები ალბათობათა თეორიიდან.

ამოცანა 1.

ყველა შესაძლო ხელშემწყობი შემთხვევები იქნება:

$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & + \end{pmatrix}$. ასევე თუ ადგილებს შევუცვლით სტრიქონებს გვექნება კიდევ 3 შემთხვევა და კიდევ მე-7 $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$. სულ შვიდი.

წყვილებში: ა) $\frac{1}{16}$; ბ) პარალელური შეერთებაა, ე.ი. საკმარისია ერთში მაინც გადიოდეს დენი, ამიტომ $P(A \to B) = \frac{15}{16}$.

ამოცანა 2.

სახელოსნო გაითიშება, თუ მოხდება A ან B_1, B_2 და B_3 ერთდროულად. ე.ი. $C = A + B_1B_2B_3$.

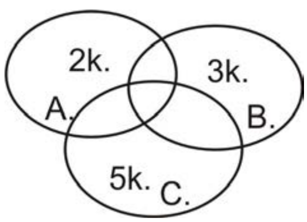
$$\overline{C} = \overline{A + B_1B_2B_3} = \overline{A} \cdot \overline{B_1B_2B_3} = \overline{A} \cdot (\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3).$$

ამოცანა 3.

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C).$$

ამოხსნები, მითითებები:

3. დავთვალოთ იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც იყოფა ან 2-ზე, ან 3-ზე, ან 5-ზე.



$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) -$$
$$N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) \cdot$$

$= \frac{100}{2} + \frac{99}{3} + \frac{100}{5} - \frac{96}{6} - \frac{100}{10} - \frac{90}{15} + \frac{90}{30} = 74$, ე.ი. არ იყოფა 2-ზე, ან 3-ზე, ან 5-ზე 26 რიცხვი.

5. 7·5=35.

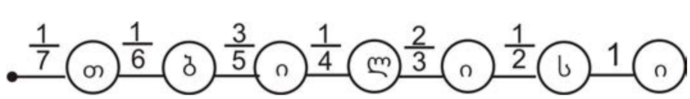
6. გადავნომროთ უჯრები. 1,2, . . . 64. კენტებით შავები, ლუწებით თეთრები. წყვილები იქნება (1,2), (1,4) . . . (1,64) . . . (63,64) ე.ი. $32^2 = 1024$.

ბ) სულ 32 თეთრი უჯრაა. ყოველი დაწყვილება ყოველთან ე.ი. $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$. ასევე შავებიც ე.ი 2·496=992.

7. $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24}{2} = 12$.

8. კვ — $\left[\begin{array}{l} 1-8-15-22-29 \\ 2-9------30 \\ 3-10-----31 \end{array}\right.$ $\mathrm{P}(5_{კვ}) = \frac{3}{7}$.

9.

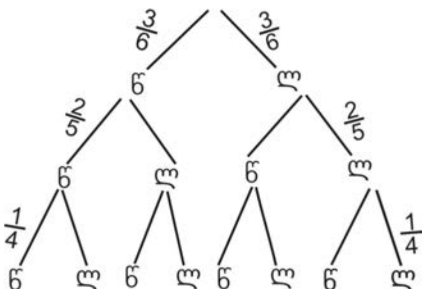


$$P = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{840}.$$

11. ა) $A_1A_2A_3$; ბ) $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2A_3}$; გ) $A_1\cup A_2\cup A_3$; დ) $\overline{A_1A_2A_3}$.

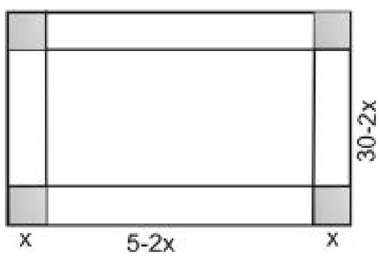
16. $P(\text{ერთი მაინც მომგებიანია}) = 1 - P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256}\approx 0{,}7$.

18.



$P(\text{ერთი ფერის}) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

20.



$S_{\text{გვ}} = 2\cdot[x(30-2x)+x(50-2x)] = 4[x(15-x)+x(25-x)] =$

$= 4[15x-x^2+25x-x^2] = 4[-2x^2+40x]$.

$y=-2x^2+40x$ ფუნქციის მნიშვნელობა მაქსიმალურია,

როცა $x_0 = \frac{-40}{4} = 10$.

6. სტატისტიკის ელემენტები

რეზიუმე:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს იპოვოს ვარიაციული მწკრივის მოდა, მედიანა, საშუალო. გაბნევის დიაპაზონი, საშ. კვადრატული გადახრა, დისპერსია. შეძლოს შეადგინოს მოცემული მონაცემების შესაბამისი დიაგრამები: სვეტოვანი, წერტილოვანი, წრიული. შეადგინოს სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა. შესაძლებელია ეს გაკვეთილი ჩატარდეს ინტეგრირებულ გაკვეთილად გეოგრაფიის მასწავლებელთან ერთად. სასურველია თუ გაკვეთილზე იქნება ერთი მაინც კომპიუტერი, მოსწავლეებს ექნებათ საშუალება მოიძიონ ინფორმაცია მაგ. პლანეტების მასის, კონტინენტთა მდინარეების, ქვეყნების მოსახლეობის შესახებ და შეადგინონ შესაბამისი დიაგრამები კომპიუტერში.

ამოხსნები, მითითებები:

6. ინტერვალში მოქცეული მონაცემთა მნიშვნელობები შესაძლებელია გაიგივდეს ამ ინტერვალის შუა წერტილთან.

შევადგინოთ ცხრილი:

ინტერვალის ნომერი	შუა წერტილი m_i	სიხშირე n_i	$n_i m_i$
1	27,5	2	55
2	32,5	3	97,5
3	37,5	3	112,5
4	42,5	8	340,0
5	47,5	6	285
6	52,5	2	105
7	57,5	2	115
ჯამი		25	1110,0

$$\bar{x}=\frac{1110}{25}=44{,}4\ .$$

7. გ) $\dfrac{2\cdot 10+8+6+2\cdot 7+2\cdot 9+2\cdot 12+2\cdot 14}{12}\approx 9830$ ლარი.

დ) ზაფხულში — 7+12+14=33, ზამთარში — 9+10+8=27.

$\dfrac{33-27}{27}\cdot 100=\dfrac{200}{9}\%\approx 22\%$ -ით.

9. $y=kx+b$ A(4;18)

$18=4k+b$ $b=18-4k$ ე.ი. $y=kx+18-4k$.

გავუტოლოთ $x^2=kx+18-4k$

$x^2-kx+4k-18=0$ D დადებითია.

$y_1+y_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=k^2-8k+36$

უმცირესია, როცა $k=4$ $b=2$ $y=4x+2$.

შეამოწმე შენი ცოდნა

1. ბ; 2. ა; 3. გ; 4. ა; 5. გ; 6. დ; 7. ა; 8. ა;
9. ა) 186100კვ.კმ; ბ) ≈80,5%; გ) ≈55%; დ) 171000 კვ.კმ

VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. ა) ერთი მაინც იხვი ჭრელია;

ბ) არც ერთი იხვი არ არის ჭრელი;

გ) ერთი მაინც იხვი არ არის ჭრელი;

დ) იხვი არც ჭრელია და არც დაფრინავს;

ე) იხვი ან ჭრელი არ არის ან არ ცურავს.

2. ა) თუ ნიკა სტუდენტი არ არის, მაშინ ის უნივერსიტეტში არ სწავლობს;

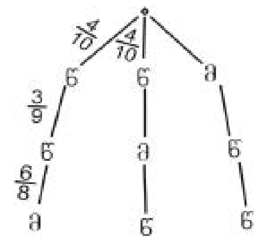
ბ) თუ მოსწავლე კარგად არ სწავლობს, მაშინ ის ბეჯითი არ არის;

გ) თუ რიცხვი არ იყოფა 36-ზე, მაშინ ის არ იყოფა ან 4-ზე ან 9-ზე.

დ) თუ ნინო არც მეგობრებთან არ წავა და არც კინოში, მაშინ ხვალ მზიანი ამინდი არ იქნება.

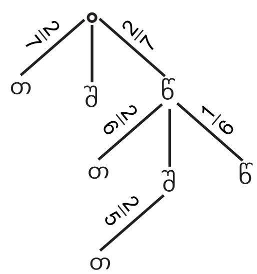
3. $\frac{2}{35}$.

4. p=$\frac{3}{10}$.



5. ასეთი ნომრებია: 14, 23, 32, 18, 27, 36. ე.ი. $p=\frac{6}{30}$.

6. $p=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.



10. ა) 186100;

ბ) $\frac{69700}{86600}\cdot 100\approx 80\%$;

გ) $\frac{69700-45100}{45100}\cdot 100\approx 55\%$;

დ) 171000.

VIII თავი

1. პერიოდული ფუნქცია

რეზიუმე:

მოსწავლეები იცნობენ ფუნქციის ზოგიერთ თვისებას — ზრდადობა-კლებადობას, ლუწ-კენტობას, უდიდეს, უმცირეს მნიშვნელობებს... გავაცნოთ მათ ფუნქციის ერთ-ერთი საინტერესო თვისება — პერიოდულობა. გავახსენოთ მათთვის ნაცნობი პერიოდული ფუნქციები — ნებისმიერი მუდმივი ფუნქცია, $\{x\}$, საათის ისრის მოძრაობა და ა.შ.

ამოხსნები, მითითებები:

2. დირიხლეს ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი.

$$r\in Q \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x + r \in Q, & \text{თუ } x \in Q \\ x + r \in I, & \text{თუ } x \in I \end{array}\right. \text{ ე.ი. } \left[\begin{array}{ll} f(x) = 1 = f(x + r), & \text{თუ } x \in Q \\ f(x) = -1 = f(x + r), & \text{თუ } x \in I \end{array}\right. .$$

6. ა) $y=x^2-x \quad [0;1]$

$f(2)=f(0)=0$

$f(1,5)=f(0,5)=0,25-0,5=-0,25.$

$$f\left(-13\frac{1}{6}\right) = f\left(-13\frac{1}{6} + 14\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{36}.$$

ბ) $y=y^3-x^2 \quad [0;1].$

$f(2)=0 \quad f(1,5)=-\frac{1}{8}; \; f\left(-13\frac{1}{6}\right) = -\frac{25}{256}.$

7. $f(-10)=f(-10+4\cdot 3)=f(2)=10.$

8. $f(-19)=-f(19)=-f(3+16)=-f(3)=-7.$

9. $f(-8,3)=-f(8,3)=-f(2,3+6)=-f(2,3)=-2.$

10. $f(x+4)=f(x+2+2)=-f(x+2)=f(x).$

11. ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია მოცემული $f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, ე.ი.

$$f(x+4)=f(x+2+2)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}.$$

$$f(x+6)=f(x+4+2)=\frac{1+f(x+4)}{1-f(x+4)} = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}.$$

$f(x+8)=f(x+6+2)=\frac{1+f(x+6)}{1-f(x+6)} = f(x)$. ე.ი. $f(x)$-ის პერიოდია 8.

$$f(2000)=f(8)=f(2+6)=\frac{f(2)-1}{f(2)+1}=0,5.$$

16. $\begin{cases} 6x + 4y + 7z = 1 \\ 4x + 2y + 5z = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = \frac{1}{3} \\ x + y + z = \frac{1}{6} \end{array}$. ე.ი. 6 სთ-ში.

2. სინუსის და კოსინუსის განმარტება

რეზიუმე:

მოსწავლეები იცნობენ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებას და მნიშვნელობებს სამკუთხედის კუთხეებისთვის. შევეცადოთ მათთვის გასაგები გახდეს ამ ფუნქციათა განზოგადება ნებისმიერი კუთხისთვის ჯერ გრადუსული და შემდეგ რადიანული ზომებისათვის.

ამოხსნები, მითითებები:

4. მაგ. 180° და –180°; 360° და –360°, შესაძლებელია მხოლოდ ღერძზე.

5. თ) $-30°+360°\cdot n \qquad n\in Z$.

6. სასურველია, რომ მნიშვნელობები მოსწავლეებმა ზეპირად იცოდნენ.

9. ა) $45°+180°\cdot n$; ბ) $-45°+180°\cdot n$.

12. მოსწავლეებმა უნდა გაიაზრონ, რომ ამ დავალების შესრულებისას არ ითხოვება კუთხის გრადუსული ზომის პოვნა. უნდა დადგინდეს, რომ $|\sin\alpha|$ მნიშვნელობა არ აღემატება 1-ს.

17. უტოლობის სამართლიანობა შეიძლება ვაჩვენოთ წრეწირზე სამკუთხედის უტოლობით.

20. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი აღვნიშნოთ a-თი, მართკუთხედის მეორე გვერდი x-ით, მაშინ პერიმეტრი ტოლი იქნება $3a+2x=10$. $x=\dfrac{10-3a}{2}$. ფართობი

$$S(a)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+ax=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{10a-3a^2}{2}=\frac{1}{4}(a^2\sqrt{3}+20a-6a^2)=\frac{1}{4}(-(6-\sqrt{3})a^2+20a).$$

ვიპოვოთ მიღებული კვადრატული ფუნქციის წვერო $a_0=\dfrac{-20}{-2(6-\sqrt{3})}=\dfrac{10(6+\sqrt{3})}{33}$.

$$x=5-\frac{3}{2}\cdot\frac{10(6+\sqrt{3})}{33}=\frac{25-5\sqrt{3}}{11}.$$

22. $-n^2+11n-28=0$, როცა $n=4;7$, ე.ი. თუ $n=5;6$ მიმდევრობის წევრები ნატურალურია.

3. sin და cos ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

რეზიუმე:

ტრიგონომეტრიის შესწავლის პროცესში ერთ-ერთი მთავარი მომენტია, მოსწავლემ კარგად გაითავისოს ტრიგონომეტრიული წრეწირი. ხედავდეს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებების სამართლიანობას, როგორც წრეწირზე, ისევე ამ ფუნქციათა შესაბამის გრაფიკებზე.

ამოხსნები, მითითებები:

1. სავარჯიშოს მიზანია, მოსწავლემ იცოდეს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები მეოთხედების მიხედვით.
გ) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$, ე.ი. sin და cos ფუნქციებს უნდა ჰქონდეთ სხვადასხვა ნიშნები, ეს კი ხდება II და IV მეოთხედებში.

4. ზ) $\sin 5°\cos 95°<0$

$\sin 5°>0$, ე.ი. $\sin 5°\cos 95°<\sin 5°$.

6. მივაქციოთ ყურადღება რომ ჯერ გამოიყენონ ლუწ-კენტობა და შემდეგ გამოყონ პერიოდი.
ი) $\cos(-2220°)=\cos 2220°=\cos(6\cdot 360°+60°)=\frac{1}{2}$.

7. ა) არ შეიძლება, ორივე ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა არის 1 და ეს მნიშვნელობა არ მიიღწევა ერთი და იგივე არგუმენტის დროს.

8. ა) $\sin 3x=\sin(3x+360°)=\sin 3(x+120°)$ ე.ი. $T_0=120°$.
ბ) $\cos^2x=\cos(2x+360°)=\cos 2(x+180°)$ $T_0=180°$. სასურველია, თუ კლასი ამის საშუალებას გვაძლევს, დავანახოთ ზოგადად, რომ $\sin(kx+b)$ და $\cos(kx+b)$ ფუნქციათა უმცირესი დადებითი პერიოდია $\frac{360°}{k}$.

9. დ) $-1\le m^2-2\le 1$
$1\le m^2\le 3$ $\quad\begin{cases}(m-\sqrt{3})(m+\sqrt{3})\le 0\\(m-1)(m+1)\ge 0\end{cases}$.

ვ) ასეთი m არ არსებობს.

11. ა) $-1\le \sin\frac{x}{4}\le 1$, ე.ი. $-2\le 2\sin\frac{x}{4}\le 2$.

16. $a(a-b+c)=a\cdot f(-1)<0$
ე.ი. a-ს და $f(-1)$ სხვადასხვა ნიშნები აქვს, ეს კი ნიშნავს, რომ $D>0$.

4. tgα და ctgα ფუნქციები და მათი თვისებები

ამოხსნები, მითითებები:

18. ა) $\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}(2x+180°)=\mathrm{tg}2(x+90°)$ $\quad T_0=90°$.

დ) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+180°\right)=\mathrm{tg}\frac{x+360°}{2}$ $\quad T_0=360°$.

19. $a=-\frac{12}{4-a}$ $\quad a^2-4a-12=0$ $\quad a=6; -2$.

20. $S = x(5-x) = -x^2+5x$ $\quad x_0=2{,}5$. $\quad$ კვადრატია 2,5 გვერდით.

5. რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

რეზიუმე:

მოსწავლეს უნდა შეეძლოს რიცხვის მდებარეობის განსაზღვრა წრეწირზე მეოთხედების მიხედვით. რიცხვითი არგუმენტის ნიშნის დადგენა. უნდა იცოდეს კუთხის გრადუსულ და რადიანულ ზომას შორის კავშირი და შეეძლოს ერთის მეორეში გადაყვანა და პირიქით, უნდა შეეძლოს ყველა იმ კითხვაზე პასუხის გაცემა, რაც მოცემულია პარაგრაფში წყვილებში სამუშაოდ.

ამოხსნები, მითითებები:

4. ა) 5 წთ-ში წუთების ისარი გადის 30°–ს ანუ სრული წრეწირის $\frac{1}{12}$-ს, ე.ი. $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

7. დ) n=8 $\frac{180° - 6}{8}$=135°.

12. ბ.

1) $n^2-n-5=1$
   $n^2-n-6=0$ $n=2$;
2) $n^2-n-5=7$
   $n^2-n-12=0$ $n=4$;
3) $n^2-n-5=-11$
   $n^2-n+6=0$ $n=\varnothing$.

13. $a_n=n^2-n-12$

$n_0=\frac{1}{2}$, ე.ი. უმცირესია $a_1=-12$. უდიდესი არ არსებობს.

14. გემის სიჩქარე — x

მდინარის სიჩქარე — y=ტივის სიჩქარეს.

პირობის თანახმად, 3(x+y)=4(x–y). საიდანაც x=7y.

ტივი A-დან B-მდე 3(x+y) მანძილს გაივლის $\frac{3(x+y)}{y} = 3\left(\frac{x}{y}+1\right)$=3·8=24 (სთ).

6. ტრიგონომეტრიული განტოლება

რეზიუმე:

დავანახოთ მოსწავლეებს sinx=a და cosx=a განტოლებების ამოხსნები წრეწირზე. ჯერ განსაზღვრონ a პარამეტრის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც განტოლებებს ამოხსნა ექნებათ, შემდეგ ეტაპზე დავაწერინოთ ამონახსნები ცალ-ცალკე. მაგალითად, $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ და $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, შემდეგ ამ პასუხების გაერთიანებით მიღებული ფორმულა. ანალოგიურად cosx=a-სთვის.

I sinx=a

ამოხსნები, მითითებები:

5. ა) $2\sin^2x-3\sin x+1=0$ $\sin x=y$.

$2y^2-3y+1=0$

$y=\frac{1}{2}$; 1.

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right.$$

7. ა) $\sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოცემული განტოლების ფესვებია 0 და $\frac{\pi}{6}$.

II cosx=0 განტოლება

6. გ) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ასეთ შემთხვევაში სჯობს ფესვები ცალ-ცალკე დაიწეროს.

$x_1=\pi+2\pi k$ $x_2=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

7. ა) $2\cos^2x+5\cos x-3=0$ $\cos x=y$.

$2y^2+5y-3=0$

$y=\left[\begin{array}{l} -3 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\cos x\neq-3$.

$\cos x= \frac{1}{2}$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. უმცირესი დადებითი $\frac{\pi}{3}$.

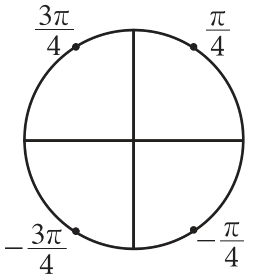
ბ) $2\cos^2x-\sqrt{2}\cos x+2\cos x-\sqrt{2}=0$

$2\cos x(\cos x+1)-\sqrt{2}(\cos x+1)=0$

$(\cos x+1)(2\cos x-\sqrt{2})=0$

$\cos x=-1$ $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. უმცირესი დადებითია $\frac{\pi}{4}$.

10. ბ) $\cos^2x=\frac{1}{2}$.



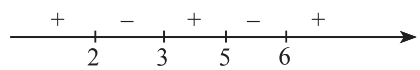
$\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ფორმულით $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$ და $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. თუ განვიხილავთ წრეწირზე, პასუხი შეიძლება ჩავწეროთ ასე: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, ან უფრო მარტივადაც: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

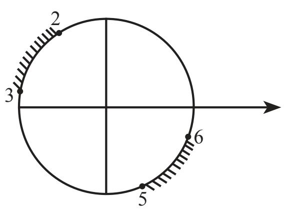
11. ვ) $\cos x=x^2-2x+2$

x^2-2x+2 ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 1, როცა $x=1$, მაგრამ $\cos 1\neq 1$, ე.ი. განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

12. ა) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0$

$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-6)}<0$





II და IV მეოთხედში sin და cos სხვადასხვანიშნიანებია.

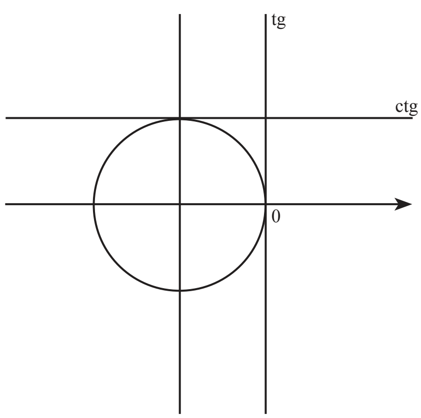
14. $x^2-5x+3=0$

$x_1+x_2=5$

$x_1x_2=3$

$$\frac{x_2}{x_1+1}+\frac{x_1}{x_2+1}=\frac{x_2^2+x_1^2+x_1+x_2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1+x_2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\frac{8}{3}.$$

III. tgx=a განტოლება.



3.

თუ $a\in(0;\infty)$
ორივე ერთნიშნიანი
თუ $a\in(-\infty;0)$
სხვადასხვანიშნიანი.

6. ა) $tg^3x-3tgx=0$

$tgx=0 \quad tgx=\pm\sqrt{3}$

$x=\pi k \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k.$

ბ) tgx–tgxsinx=0

tgx(1–sinx)=0

tgx=0 ან sinx=1

$x=\pi n \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, მაგრამ ამ წერტილში tg განსაზღვრული არ არის, ე.ი. პასუხია: $x=\pi n$.

7. ა) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

9. $y=x^2-6x+c$

რადგან $x_2=5$, ე.ი. $x_1=1$ და $c=5$ და M(0;5), N(3;–4).

10. $y=kx+b$ (3;10) $\quad y=x^2$.

$10=3k+b$

$b=10-3k$

გვინდა გადაკვეთის წერტილების ორდინატების ჯამი, ე.ი. $x^2=kx+b$; $x^2-kx+3k-10=0$.

$y_1+y_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=k^2-6k+20$.

$k_0=3$ შესაბამისი $b=1$, ე.ი. $y=3x+1$.

12. $ax^2+bx+c=0 \qquad x_1=4;\ x_2=5$.

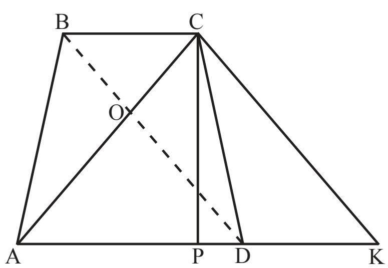
ე.ი. $\frac{x+5}{x}=4 \qquad \frac{x+5}{x}=5$.

$x=\frac{5}{3} \qquad x=\frac{5}{4}$.

VIII თავის დამატებითი სავარჯიშოები

14. ა) $\sin\left(2\operatorname{arctg}1+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\pi=0$.

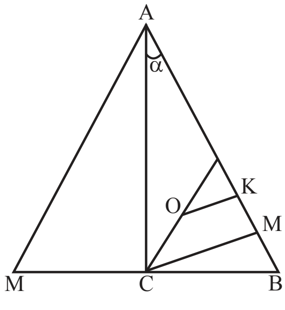
15.



$\angle COD=2\alpha$ ე.ი. $\angle AOD=180°-2\alpha$. გადავიტანოთ $CK\|BD$. $\angle ACK=\angle AOD=180°-2\alpha$. დავუშვათ $CP\perp AK$, მაშინ $\angle ACP=90°-\alpha$ და $\angle CAP=\alpha$, ე.ი. $AP=h\operatorname{ctg}\alpha$.

$S_{ABCD}=S_{ACK}=\frac{1}{2}AK\cdot CP=AP\cdot CP=h^2\operatorname{ctg}\alpha$.

16.



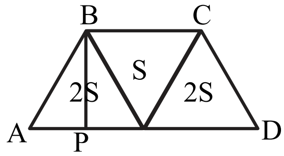
მივადგათ $\Delta ACM=\Delta ACB$

$2S=\frac{a^2\sin 2\alpha}{2};\ a=AB=AM;\ a^2=\frac{4S}{\sin 2\alpha}$

$a=2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$. $h_{AB}=a\sin 2\alpha=2\sqrt{S\cdot\sin 2\alpha}$.

$CM=\frac{1}{2}h_{AB}=\sqrt{S\cdot\sin 2\alpha} \qquad OK=\frac{1}{3}\sqrt{S\cdot\sin 2\alpha}$.

17. $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S_{BCM}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $S_{ABM}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot AM$, საიდანაც AM=2a; დავუშვათ $BP\perp AM$,



მაშინ $PM=\frac{a}{2}$ და $AP=\frac{3a}{2}$. ΔABP-ში $tg\alpha=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, ე.ი. $\alpha=30°$.

20. ა) $\sin\frac{\pi(x-2)}{3}=1$

$\frac{\pi(x-2)}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$x-2=\frac{3}{2}+6k$

$x=\frac{7}{2}+6k$ უმცირესი დადებითია 3,5.

საკონტროლო წერის ნიმუშები

საკონტროლო წერა №1

1. იპოვეთ a, თუ $y=\frac{3}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს A წერტილი,

ა) $A(3;a)$; ბ) $A(a;\sqrt{2})$.

2. ააგეთ $y=\frac{2}{|x|}+1$ ფუნქციის გრაფიკი. დაწერეთ

ა) ფუნქციის განსაზღვრის არე;

ბ) მნიშვნელობათა არე;

გ) ზრდადობა-კლებადობის შუალედები;

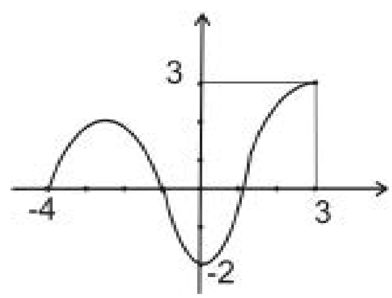
დ) ნიშანმუდმივობის შუალედები.

კვეთს თუ არა ფუნქციის გრაფიკი 1) საკოორდინატო ღერძებს; 2) $y=1$ წრფეს; $y=2$ წრფეს?

3. მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი

1) იპოვეთ მისი განსაზღვრის არე;
2) იპოვეთ მისი მნიშვნელობათა არე;
3) ღერძებთან კვეთის წერტილები;
4) ლუწია თუ კენტი ფუნქცია;
5) ზრდადობა — კლებადობის შუალედები;
6) ამოხსენით უტოლობა:

ა) $f(x)>0$; ბ) $f(x)\leq 0$; გ) $f(x)<1$; დ) $f(x)<5$; ე) $f(x)<-5$.



7. ღებულობს თუ არა ფუნქცია უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას და მიუთითეთ არგუმენტის შესაბამისი მნიშვნელობა.

საკონტროლო წერა №2

1. რომელი წერტილია $M(3;4)$ წერტილის სიმეტრიული ა) ორდინატთა ღერძის მიმართ, ბ) აბსცისათა ღერძის მიმართ, გ) კოორდინატთა სათავის მიმართ.

2. იპოვეთ მანძილი A(0;2;3) და B(7;3;9) წერტილებს შორის.
3 ABC სამკუთხედის BC გვერდზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ BK:KC=1:3, AC გვერდზე — L წერტილი ისე, რომ AL:LC=2:5. რა შეფარდებით ყოფს AK და BL მონაკვეთების გადაკვეთის O წერტილი AK და BL მონაკვეთებს?

4. ტრაპეცია ფუძეების პარალელური წრფით გაყოფილია ორ მსგავს ტრაპეციად. იპოვეთ ამ მონაკვეთის სიგრძე,თუ ფუძეების სიგრძეებია 3სმ. და27სმ

საკონტროლო წერა №3

1. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას: $(a^2–7a+12)x = a–4$
   ა) ერთი ამონახსენი; ბ)უამრავი ამონახსენი; გ)არცერთი ამონახსენი.

2. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას ზუსტად ორი ამონახსენი: $(x^2–3x+2)(x–a)=0$.

3. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე: $y = \dfrac{5-x}{\sqrt{5x+3-2x^2}} + \dfrac{3}{x-2}$

4. k პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს უტოლობას: $kx^2–9kx+5k+1<0$
ა) ერთადერთი ამონახსენი; ბ)უამრავი ამონახსენი; გ)არცერთი ამონახსენი.

5. ამოხსენით უტოლობა: $\dfrac{x^2(x-3)^4}{(x^2+x-20)(x+1)^3} \geq 0$.

საკონტროლო წერა №4

1. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 10:7:4. იპოვეთ უდიდესი კუთხის კოსინუსი.

2. ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძეა $16\sqrt{3}$ სმ.BC გვერდის სიგრძეა 24სმ; იპოვეთ A კუთხის გრადუსული ზომა.

3. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 8სმ,12სმ და 14სმ. იპოვეთ უმცირესი კუთხის ბისექტრისის სიგრძე.

4. იპოვეთ შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსები სამკუთხედისა, რომლის გვერდებია 8სმ, 10სმ და 14სმ.

საკონტროლო წერა №5

1. გაათავისუფლეთ წილადის მნიშვნელი ირაციონალობისაგან:
   ა) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; ბ) $\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}$; გ) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

2. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\sqrt{19+8\sqrt{3}} - \sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

3. შეკვეცეთ წილადი: ა) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; ბ) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{y^2}}$

4. გაამარტივეთ: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{4}{x-1}\right)^{-3}$

5. ჩაწერეთ ათობით სისტემაში რიცხვი $(100101)_2$.

საკონტროლო წერა №6

1. იპოვეთ კუთხის რადიანული ზომა, თუ
   ა) 40°; ბ) 35°; გ) 190°; დ) 240°.

2. იპოვეთ 120°-იანი სეგმენტის ფართობი, თუ ამ სეგმენტის შესაბამისი ქორდა 20 სმ-ია.

3. იპოვეთ წესიერი 12-კუთხედის კუთხის გრადუსული ზომა.

4. წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $3\sqrt{3}$ -ის ტოლია. იპოვეთ ექვსკუთხედის გვერდი.

5. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე, თუ მასში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდი 3სმ-ს ტოლია.

საკონტროლო წერა №7

1. სტადიონს აქვს 4 შესასვლელი. სტადიონზე შესვლის და გასვლის სულ რამდენი ვარიანტი არსებობს?
2. მოცემულია $A = \{3;4;8;7\}$ $B = \{0;5;6\}$. სიბრტყეზე რამდენი წერტილი არსებობს, თუ მისი კოორდინატები აირჩევა
   ა) A სიმრავლიდან; ბ) B სიმრავლიდან; გ) პირველი კოორდინატი A სიმრავლიდან, მეორე კოორდინატი B სიმრავლიდან;
3. სამშენებლო კომპანია სამუშაოებს ასრულებს 5 სხვადასხვა ობიექტზე. კომპანიას ყავს 10 სატვირთო ავტომანქანა. თითოეული ობიექტისათვის გამოყოფილი უნდა იყოს თითო მანქანა. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ

ა) ავტომანქანები სხვადასხვა ტვირთმზიდობისაა;

ბ) ავტომანქანები ერთი და იგივე ტვირთმზიდობისაა.

4. ვაგორებთ ორ კამათელს და ვიხილავთ შემდეგ ხდომილობას:

   A — პირველ კამათელზე მოვა 6 ქულა;

   B — ერთ-ერთ კამათელზე მოვა 5 ქულა. გამოთვალეთ A; B; $\overline{A}$; $\overline{B}$ და $A \cdot \overline{B}$ ხდომილობათა ალბათობა.

5. ოთახში იმყოფება ხუთი გოგონა, ამასთან ნებისმიერი გოგონას ორი და მაინც ამ ოთახშია. დაამტკიცეთ, რომ ხუთივე ეს გოგონა დები არიან.

6. მოცემულია კვადრატული განტოლება $x^2 - 2x - a^2 - a + 7 = 0$ და $|a| \le 5$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ განტოლების ფესვები არ ექნება, თუ a შემთხვევით აღებული რიცხვია მისი დასაშვები არედან?

საკონტროლო წერა №8

1. ცნობილია, რომ f(x) ფუნქცია ლუწია და პერიოდულია პერიოდით 7. იპოვეთ f(30), თუ f(–2)=5.

2. იპოვეთ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}1 + \arccos 0$.

3. ამოხსენით განტოლება: ა) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; ბ) $2\cos 2x - 5\cos x - 3 = 0$.

4. a–ს რა მნიშვნელობებისთვის გააჩნია განტოლებას ამონახსენი?
   ა) $\sin x = \frac{a-2}{a+1}$; ბ) $\operatorname{tg}x = a^2 + 5a - 6$.

5. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი წერტილი:
   ა) $y = \sin 2x$; ბ) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 2\right)$.